

Elektrisches Feld

4. Vorlesung über Grundlagen der Physik II

Auftraggeber: 27. 1.2005 Professor Dr. Volker Beck

Bearbeitung: 4. 4.2005 – 7. 4.2005 Dr. Norbert Südland

Letzte Berechnung: 7. 4.2005 Dr. Norbert Südland

■ 4.1. Das Elektrische Feld

■ 4.1.1. Versuchsaufbauten und Phänomenologie

■ 4.1.1.1. Sichtbarmachung von Feldlinien

Werden Ladungsträger in eine isolierende Flüssigkeit (z.B. Öl) gesetzt, so kann man durch Grießkörner oder Bärlappsamen erreichen, dass sich diese kleinen Körner in einem geometrischen Muster "entlang der Feldlinien" anordnen.

Jedes kleine Korn wird im *elektrischen Feld* aufgrund der *Influenz* zu einem kleinen Dipol, der sich so ausrichtet (dreht), dass er in die Richtung zeigt, in der das elektrische Feld wirkt.

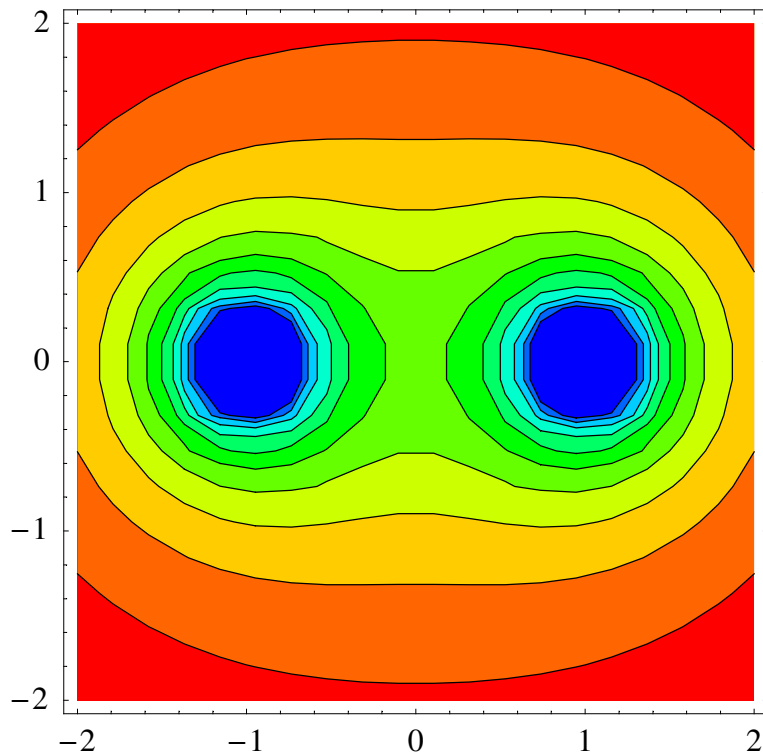
■ 4.1.1.2. Äquipotenziallinien

Einfacher als Feldlinien lassen sich *Äquipotenziallinien* zeichnen, die analog zu den Höhenlinien auf der Landkarte die Orte gleicher elektrischer Spannung miteinander verbinden:

```

Farbe = Hue[ $\frac{2\# + 0}{3}$ ] &;
$DefaultFont = {"Times", 12.};
ContourPlot[ $\frac{1}{\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}$ ,
{x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ColorFunction -> Farbe, PlotPoints -> 20];

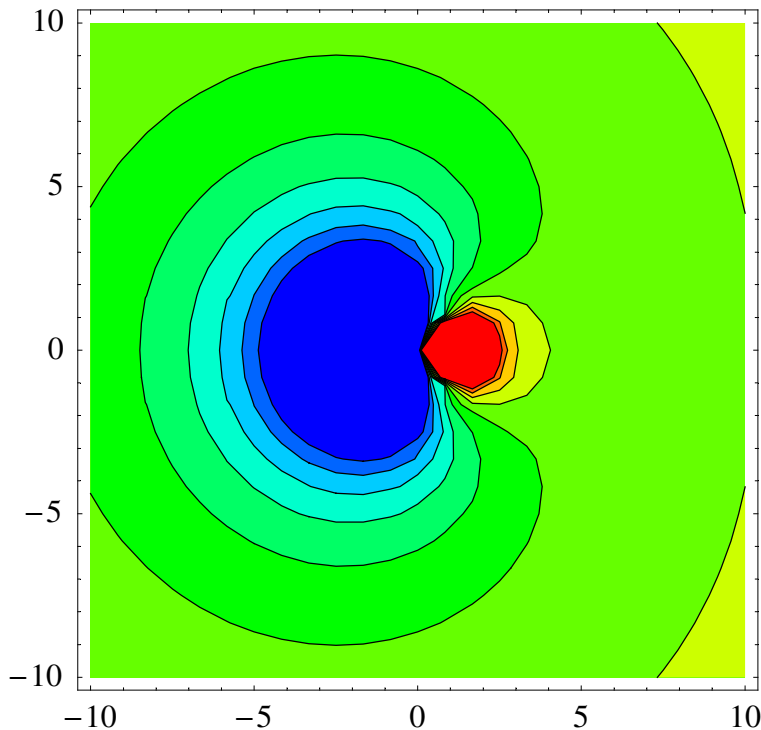
```



In dieses Potenzialgebirge lassen sich die Feldlinien als die Fluchtlinien einzeichnen, die alle Äquipotenziallinien senkrecht schneiden. Im Vergleich mit der Landkarte stellen Feldlinien die möglichen Flusslinien des Wassers dar.

Bei ungleichnamigen Ladungen ergibt sich folgendes Potenzialgebirge:

ContourPlot[$\frac{2}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$,
 {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, ColorFunction → Farbe, PlotPoints → 25];



Es kann einen *abarischen Punkt* geben, bei dem die Feldstärke Null (auch ohne Richtung!) resultiert.

■ 4.1.1.3. Kraftlinien

Eine Feldlinie erweist sich als diejenige Kurve, auf der eine Probeladung im Feld transportiert würde. Die Feldlinien sagen also etwas darüber aus, welche Kräfte verschiedene Ladungsträger aufeinander ausüben. Sie werden deshalb auch als (reduzierte) Kraftlinien bezeichnet.

■ 4.1.1.4. Vergleich Landkarte und Potenzialgebirge

Ein senkrechter Felsüberhang erzeugt auf der Landkarte eine senkrechte "Feldlinie" und steht für den freien Fall, der maximal mit dem Ortsfaktor erfolgt.

Ein senkrechter Sprung im Potenzialgebirge steht für eine unendlich hohe lokale Feldstärke und eine ebenso große Feldbeschleunigung.

Dieser Unterschied zeigt, dass ein Potenzialgebirge nur bedingt mit einer Landkarte und ihren Höhenlinien verglichen werden kann.

■ 4.1.1.5. Eigenschaften von Feldlinien

- Die Tangente an die Feldlinie gibt die lokale Richtung der Kraft auf eine Probeladung an.

- Feldlinien schneiden sich fast nie (Ausnahme z.B. bei elektrisch leitender Kugel im sonst homogenen Kondensatorfeld).
- Feldlinien gehen per definitionem von der positiven zur negativen Ladung.
- Je dichter die Feldlinien liegen, desto größer ist die Kraft.
- Feldlinien stehen auf Äquipotenziallinien, also auch auf allen metallischen Oberflächen, senkrecht (dadurch Methode der Spiegelladung).

■ 4.1.1.6. Faradayscher Käfig

Im Innern eines elektrischen Leiters gibt es kein elektrisches Feld. Radioantennen müssen deshalb außerhalb eines Autos angebracht werden. Im Innern eines Autos funktioniert ein Handy trotzdem, da die zugehörigen Mikrowellen durch die Autofenster hindurchkommen. Für UKW (z.B. 11 m Wellenlänge beim CB-Funk) ist das Innere eines Autos nicht erreichbar.

Die Ladung verteilt sich so auf der Außenfläche eines elektrisch leitenden Hohlkörpers, dass unabhängig von der Form im Innern des Hohlkörpers kein elektrisches Feld nachweisbar ist. Dieses Phänomen wurde zuerst von Michael Faraday systematisch überprüft.

■ 4.1.2. Konforme Abbildungen

■ 4.1.2.1. Beispiel Plattenkondensator

Mit Hilfe der *konformen Abbildung*

$$\text{Abbildung[1]} = z == \text{Exp}[-w] + w /. \{w \rightarrow u + i v, z \rightarrow x + i y\}$$

$$x + I y == E^{-u-I v} + u + I v$$

kann eine reellwertige Darstellung erzwungen werden:

$$\text{Vektor[1]} = \text{FunctionExpand}[\{\text{Re} /@ \#, \text{Im} /@ \# \} \& @ \text{Abbildung[1]}] /. \{\text{Re}[x_] \rightarrow x, \text{Im}[_] \rightarrow 0\};$$

$$\text{Vektor[1]} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} x == u + E^{-u} \text{Cos}[v] \\ y == v - E^{-u} \text{Sin}[v] \end{pmatrix}$$

Hier sind die Äquipotenziallinien durch konstantes v gegeben, wodurch sich deren Richtung wie folgt bestimmen lässt:

$$\text{ÄquipotenziallinienRichtung[1]} = \partial_u \text{Vektor[1]} /. \{0 == x_ \rightarrow x\};$$

$$\text{ÄquipotenziallinienRichtung[1]} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - E^{-u} \text{Cos}[v] \\ E^{-u} \text{Sin}[v] \end{pmatrix}$$

Für die Feldlinien gilt konstantes u , wodurch sich deren Richtung wie folgt bestimmen lässt:

FeldlinienRichtung[1] = ∂_v Vektor[1] /. {0 == x_ -> x};

FeldlinienRichtung[1] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -E^{-u} \sin[v] \\ 1 - E^{-u} \cos[v] \end{pmatrix}$$

Die Äquipotenziallinien stehen auf den Feldlinien stets senkrecht:

ÄquipotenziallinienRichtung[1].FeldlinienRichtung[1]

0

Hier wird eine Eigenschaft komplexwertiger Abbildungen ausgenutzt, mit deren Hilfe Äquipotenziallinien und Feldlinien gezeichnet werden können.

Die Äquipotenziallinien eines Plattenkondensators ergeben:

PotenzialBilder[1] =

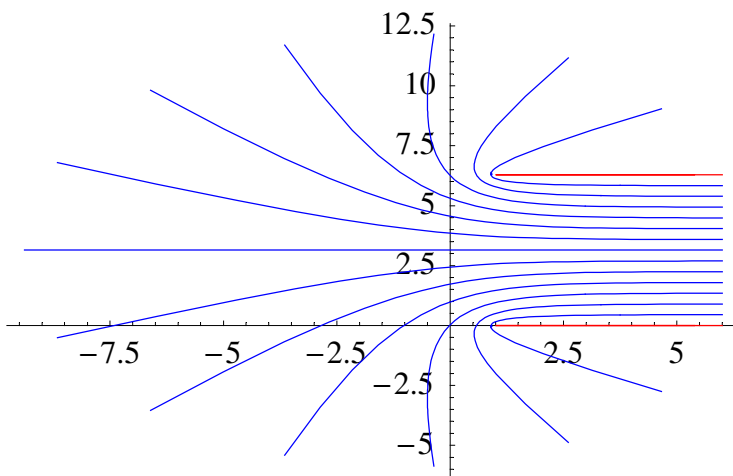
Join[ParametricPlot[Evaluate[Last /@ Vektor[1] /. v -> #], {u, -2, 6}, DisplayFunction -> Identity,

PlotStyle -> Hue[0]] & /@ Range[0, 2 π , 2 π],

ParametricPlot[Evaluate[Last /@ Vektor[1] /. v -> #], {u, -2, 6}, DisplayFunction -> Identity,

PlotStyle -> Hue[$\frac{2}{3}$]] & /@ Range[$\frac{\pi}{7}$, 2 π - $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$]];

Show[PotenzialBilder[1], DisplayFunction -> \$DisplayFunction];



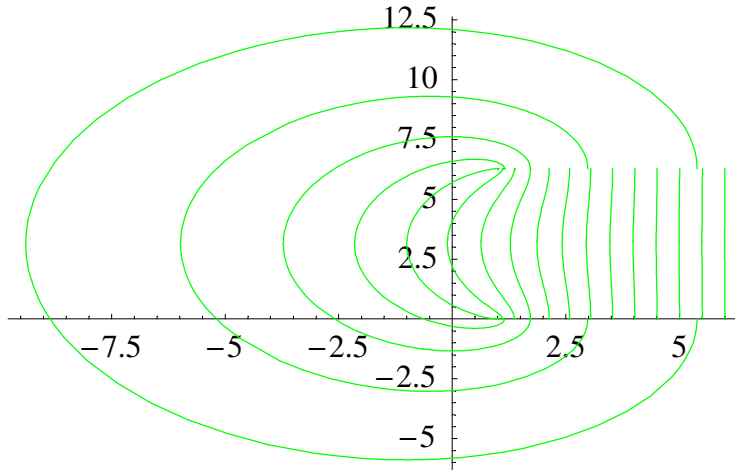
Diese konforme Abbildung stellt die Situation eines Plattenkondensators (rot) dar.

Die zugehörigen Feldlinienverläufe ergeben sich wie folgt:

```

FeldlinienBilder[1] = ParametricPlot[Evaluate[Last /@ Vektor[1] /. u -> #], {v, 0, 2 π},
  DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> Hue[1/3]] & /@ Range[-2, 6, 1/2];
Show[FeldlinienBilder[1], DisplayFunction -> $DisplayFunction];

```

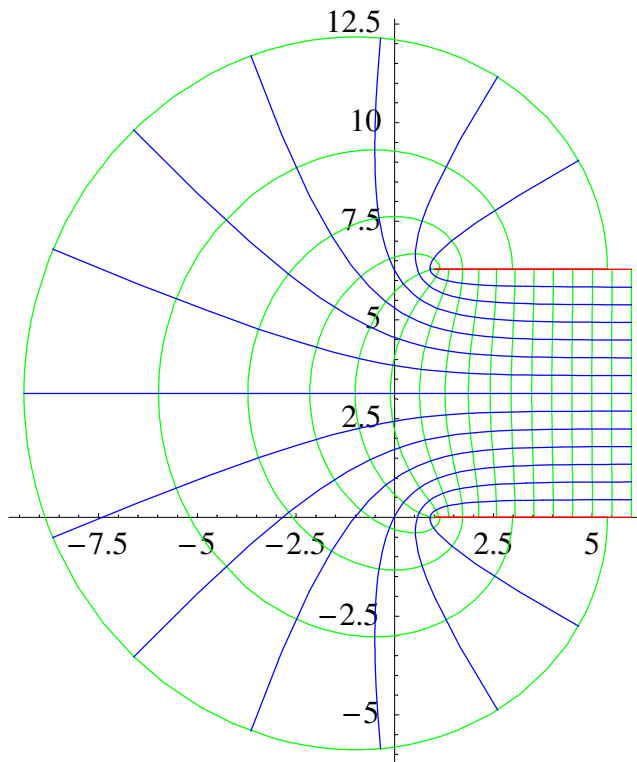


Damit ergibt sich folgendes Gesamtschaubild:

```

Plattenkondensator = Show[FeldlinienBilder[1], PotenzialBilder[1],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];

```



Die konforme Abbildung ist für Übungsaufgaben an der Fachhochschule zu kompliziert. Trotzdem soll hier darauf hingewiesen werden, dass derartige mathematische Kunstgriffe existieren, mit denen sich auch kompliziertere Feldlinienverläufe eventuell noch abbilden lassen.

■ 4.1.2.2. Beispiel Dipol

Mit Hilfe der konformen Abbildung

$$\text{Abbildung[2]} = z == \frac{1}{w} /. \{w \rightarrow u + i v, z \rightarrow x + i y\}$$

$$x + I y == \frac{1}{u + I v}$$

kann eine reellwertige Darstellung erzwungen werden:

$$\text{Vektor[2]} = \text{ComplexExpand}\{\text{Re}/@ \#, \text{Im}/@ \# \} \& @ \text{Abbildung[2]} /.$$

$$\{\text{Re}[x_] := x, \text{Im}[_] := 0, \text{Abs}[u + I v] \rightarrow \sqrt{u^2 + v^2}\};$$

$$\text{Vektor[2]} // \text{MatrixForm}$$

$$\left(\begin{array}{l} x == \frac{u}{u^2+v^2} \\ y == -\frac{v}{u^2+v^2} \end{array} \right)$$

Hier sind die Äquipotenziallinien durch konstantes v gegeben, wodurch sich deren Richtung wie folgt bestimmen lässt:

$$\text{ÄquipotenziallinienRichtung[2]} = \partial_u \text{Vektor[2]} /. \{0 == x_ := x\};$$

$$\text{ÄquipotenziallinienRichtung[2]} // \text{MatrixForm}$$

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{2u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{1}{u^2+v^2} \\ \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \end{array} \right)$$

Für die Feldlinien gilt konstantes u , wodurch sich deren Richtung wie folgt bestimmen lässt:

$$\text{FeldlinienRichtung[2]} = \partial_v \text{Vektor[2]} /. \{0 == x_ := x\};$$

$$\text{FeldlinienRichtung[2]} // \text{MatrixForm}$$

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{2v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{1}{u^2+v^2} \end{array} \right)$$

Die Äquipotenziallinien stehen auf den Feldlinien stets senkrecht:

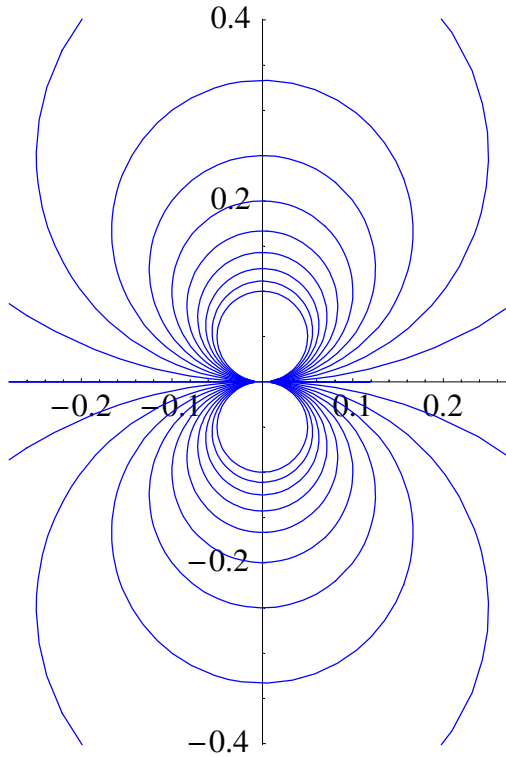
$$\text{ÄquipotenziallinienRichtung[2].FeldlinienRichtung[2]} // \text{Simplify}$$

0

Auch hier wird eine Eigenschaft komplexwertiger Abbildungen ausgenutzt, mit deren Hilfe Äquipotenziallinien und Feldlinien gezeichnet werden können.

Die Äquipotenziallinien eines idealen Dipols ergeben:

```
PotenzialBilder[2] = ParametricPlot[Evaluate[Last /@ Vektor[2] /. v -> #], {u, -100, 100},
  DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> Hue[ $\frac{2}{3}$ ] & /@ Range[-10, 10];
Show[PotenzialBilder[2], DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];
```



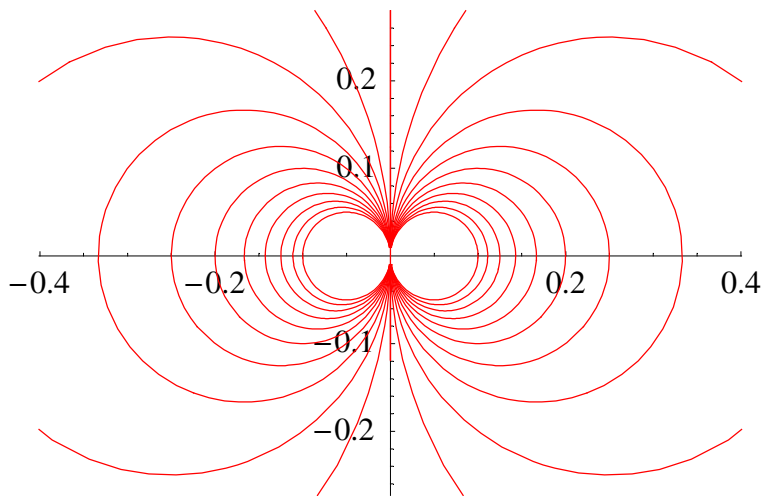
Diese konforme Abbildung stellt die Situation eines *idealen Dipols* dar, bei dem zwei ungleichnamige Ladungen (mit Abstand Null) übereinander liegen. Prinzipiell kann der Dipol auch als reales Molekül die Form einer der angegebenen Äquipotenziallinien besitzen, um als idealer Dipol zu gelten.

Die zugehörigen Feldlinienverläufe ergeben sich wie folgt:


```

FeldlinienBilder[2] = ParametricPlot[Evaluate[Last /@ Vektor[2] /. u -> #], {v, -100, 100},
  DisplayFunction -> Identity, PlotStyle -> Hue[0]] & /@ Range[-10, 10];
Show[FeldlinienBilder[2], DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];

```

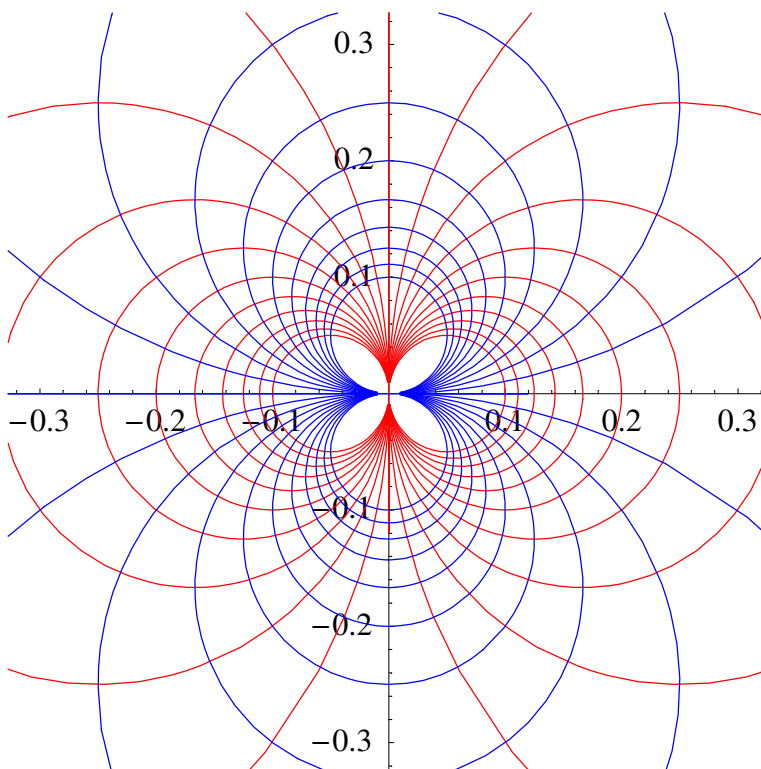


Damit ergibt sich folgendes Gesamtschaubild:

```

Dipol = Show[FeldlinienBilder[2], PotenzialBilder[2],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];

```



Diese Abbildung zeigt, dass die Interpretation als Äquipotenziallinie oder Feldlinie inhaltlich austauschbar sein kann.

Eine Systematik zur Beschreibung von Versuchsaufbauten durch eine konforme Abbildung ist mir bislang nicht bekannt. Es besteht lediglich die Möglichkeit, einige konforme Abbildungen für die Elektrostatik zu interpretieren.

■ 4.1.3. Elektrische Feldstärke

■ 4.1.3.1. Symbol und Einheit

Die elektrische Feldstärke wird wie die Energie mit E abgekürzt. Verwechslungen sind vorprogrammiert und müssen durch Einheitenkontrolle oder den Vektorpfeil vermieden werden.

Zur Mechanik besteht folgendes Analogon

$$\vec{F} = m \vec{a} = q \vec{E} \quad (4.1)$$

Daraus folgt die (anfängliche) Beschleunigung im Schwerefeld:

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad (4.2)$$

Das elektrische Feld ergibt sich aus Messwerten wie folgt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (4.3)$$

Daraus folgt die Einheit der elektrischen Feldstärke:

$$[\vec{E}] = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{kg \ m}{A \ s^3} = 1 \frac{kg}{C} \frac{m}{s^2} = 1 \frac{V}{m} \quad (4.4)$$

Die elektrische Feldstärke besitzt also die Einheit einer Beschleunigung, multipliziert mit der Einheit des elektrochemischen Äquivalents. Ein Zusammenhang $\vec{E} = \ddot{A} \vec{a}$ besteht trotzdem nicht.

■ 4.1.3.2. Elektrische Feldstärke im Plattenkondensator

Wie die Betrachtung der konformen Abbildung ergeben hat, ist das elektrische Feld im Innern eines Plattenkondensators recht homogen.

Der Einheitenvergleich ergibt folgenden Zusammenhang zur elektrischen Spannung:

$$\left(|\vec{E}| \right) = \frac{U}{d} \quad (4.5)$$

Dies gilt nur für homogene elektrische Felder, also den Plattenkondensator.

Wird der Plattenabstand eines geladenen Kondensators verringert, so erhöht sich die Feldstärke deutlich. Es kann sogar zur Plasma-Entladung kommen, so wie dies beabsichtigt in der archäologischen Restaurierung angewendet wird.

■ 4.1.3.3. Elektrische Feldstärke einer Punktladung

Aus der Coulombkraft folgt mit Gleichung (4.3):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (4.6)$$

Die (positive) Probeladung q spielt also keine Rolle mehr – wie in der Mechanik die Masse m .

Da sich Kräfte vektoriell addieren lassen, lassen sich auch elektrische Feldstärken vektoriell addieren.

■ 4.1.3.4. Elektrische Feldstärke mehrerer Punktladungen

Folgende Ladungen seien vorhanden: $Q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ bei $\{0 \text{ m}, 2 \text{ m}\}$, $Q_2 = 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ bei $\{3 \text{ m}, 4 \text{ m}\}$ und $Q_3 = -2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ bei $\{2 \text{ m}, 0 \text{ m}\}$.

Daraus folgt das elektrische Feld:

<< Utilities`Notation`

Symbolize[\vec{E}];

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{\left(\sqrt{(x-0\text{"m"})^2 + (y-2\text{"m"})^2}\right)^3} \{x-0\text{"m"}, y-2\text{"m"}\} + \frac{Q_2}{\left(\sqrt{(x-3\text{"m"})^2 + (y-4\text{"m"})^2}\right)^3} \{x-3\text{"m"}, y-4\text{"m"}\} + \frac{Q_3}{\left(\sqrt{(x-2\text{"m"})^2 + (y-0\text{"m"})^2}\right)^3} \{x-2\text{"m"}, y-0\text{"m"}\} \right);$$

$\vec{E} //$

MatrixForm

$$\left(\begin{array}{c} \frac{x Q_1}{(x^2 + (-2\text{m})^2)^{3/2}} + \frac{(-3\text{m}+x) Q_2}{((-3\text{m}+x)^2 + (-4\text{m})^2)^{3/2}} + \frac{(-2\text{m}+x) Q_3}{((-2\text{m}+x)^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{(-2\text{m}+y) Q_1}{(x^2 + (-2\text{m})^2)^{3/2}} + \frac{(-4\text{m}+y) Q_2}{((-3\text{m}+x)^2 + (-4\text{m})^2)^{3/2}} + \frac{y Q_3}{((-2\text{m}+x)^2 + y^2)^{3/2}} \end{array} \right) / (4\pi\epsilon_0)$$

Im Punkt $\{0, 0\}$ ergibt sich:

Feldstärke =

$$\vec{E} /. \{x \rightarrow 0\text{"m"}, y \rightarrow 0\text{"m"}, \epsilon_0 \rightarrow 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{"F"}}{\text{"m"}}, Q_1 \rightarrow 2 \cdot 10^{-9} \text{"C"}, Q_2 \rightarrow 2.5 \cdot 10^{-9} \text{"C"}, Q_3 \rightarrow -2 \cdot 10^{-9} \text{"C"}\} /. \{\text{"F"} \rightarrow \frac{\text{"C"}}{\text{"V"}}\} // \text{PowerExpand}$$

$$\left\{ \frac{3.95452 \text{ V}}{\text{m}}, -\frac{5.21278 \text{ V}}{\text{m}} \right\}$$

Auf eine Probeladung $q = 10^{-12} \text{ C}$ wirkt am Koordinatenursprung folgende Kraft:

$$\text{Kraft} = q \text{ Feldstärke} /. \{q \rightarrow 10^{-12} \text{ "C"}\} /. \{\text{"V"} \rightarrow \frac{\text{"kg"}}{\text{"C"}} \frac{\text{"m"}^2}{\text{"s"}^2}\};$$

Kraft // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{3.95452 \times 10^{-12} \text{ kg m}}{\text{s}^2} \\ -\frac{5.21278 \times 10^{-12} \text{ kg m}}{\text{s}^2} \end{pmatrix}$$

■ 4.2. Das Coulomb-Potenzial

■ 4.2.1. Potenzielle Energie

■ 4.2.1.1. Wiederholung aus der Mechanik

Die Arbeit W ist durch eine Arbeitskraft \vec{F} und einen zurückgelegten Weg $d\vec{s}$ gekennzeichnet:

$$W = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.7)$$

Für die Hubarbeit gegen die Fallbeschleunigung ergab sich: $W = m g \Delta h$

■ 4.2.1.2. Integral bei Coulombkraft

Um eine Probeladung q gegen das Coulombfeld einer elektrischen Ladung Q zu bewegen, muss folgende Arbeit aufgewendet werden:

$$\begin{aligned} \text{CoulombArbeit} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q Q}{r^2} dr \\ &= \frac{q Q}{4 \pi r_1 \epsilon_0} - \frac{q Q}{4 \pi r_2 \epsilon_0} \end{aligned}$$

Nun ist $W = U q$, also folgt:

$$U = \frac{W}{q} \quad (4.8)$$

Die elektrische Spannung ist eine reduzierte Arbeit, also eine intensive Größe. Sie kann als die Arbeit verstanden werden, die je Ladung verrichtet werden kann.

Daraus folgt nun die elektrische Spannung für die Coulombkraft:

$$\begin{aligned} \text{CoulombPotenzial} &= \frac{\text{CoulombArbeit}}{q} // \text{Expand} \\ &= \frac{Q}{4 \pi r_1 \epsilon_0} - \frac{Q}{4 \pi r_2 \epsilon_0} \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine *Potenzialdifferenz*. Auch der Ort $r \rightarrow \infty$ führt hier auf eine endliche Potenzialdifferenz – wie in der Mechanik bei der Gravitation.

■ 4.2.1.3. Messbarkeit

Elektrische Spannungen können auch zwischen verschiedenen Positionen im Vakuum oder der Luft anliegen. Da das Messen der elektrischen Spannung etwas Strom erfordert, bricht die Spannung eventuell durch den Messprozess zusammen.

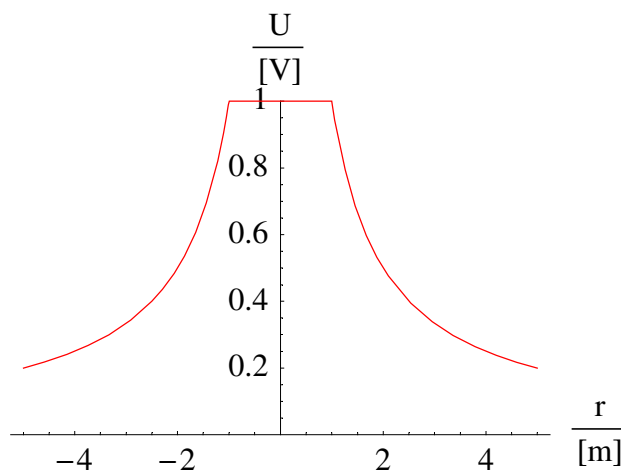
Elektrische Feldstärken lassen sich durch empfindliche *Elektrometer* auch stromfrei messen, etwa vor einem Gewitter. Im Gebirge kommt es bei gewittriger Luft zu Surren und Funkenbildung an Metallen. Bei Blitzgefahr stehen sogar die Haare zu Berge, was auf sehr hohe elektrische Feldstärken am Boden hinweist – gleichnamig geladene Körper (auch Haare) stoßen sich ab!

■ 4.2.2. Coulomb-Potenziale

■ 4.2.2.1. Abstoßung

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab. Das ergibt folgendes Schaubild:

Plot[Which[Abs[r] > 1, $\frac{1}{\sqrt{r^2}}$, Abs[r] ≤ 1, 1], {r, -5, 5},
 PlotRange → {0, 1}, PlotStyle → Hue[0], AxesLabel → {" $\frac{r}{[m]}$ ", " $\frac{U}{[V]}$ "}];



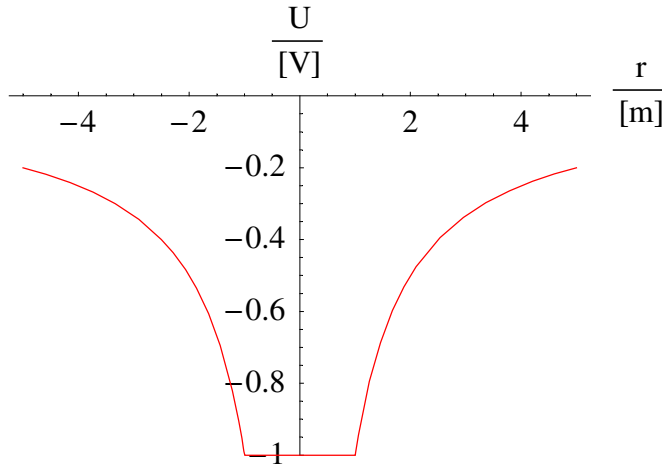
Hier wird also das Potenzial einer geladenen Kugel mit Radius $r \rightarrow 1\text{ m}$ zu einer gleichnamig geladenen Probeladung dargestellt. Im Innern der Kugel ist die Potenzialdifferenz Null, was den Faraday-Effekt unterstreicht.

■ 4.2.2.2. Anziehung

Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Das ergibt folgendes Schaubild:

Plot[Which[Abs[r] > 1, $\frac{-1}{\sqrt{r^2}}$, Abs[r] ≤ 1, -1], {r, -5, 5},

PlotRange → {0, -1}, PlotStyle → Hue[0], AxesLabel → {" $\frac{r}{[m]}$ ", " $\frac{U}{[V]}$ "}];



Hier wird das Potenzial einer geladenen Kugel mit Radius $r \rightarrow 1\text{ m}$ zu einer ungleichnamig geladenen Probeladung dargestellt. Im Innern der Kugel ist die Potentialdifferenz Null, was den Faraday-Effekt unterstreicht.

■ 4.2.2.3. Vergleich zur Gravitation

Folgende Größen korrespondieren zueinander:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\Leftrightarrow -\gamma \\ q &\Leftrightarrow m \\ Q &\Leftrightarrow M \end{aligned} \quad (4.9)$$

Der genaue Zusammenhang zwischen Coulombkraft und Gravitationskraft ist noch nicht erforscht. Speziell die geschwindigkeitsabhängige Diskussion dieser Kräfte kann eine Kopplung ergeben, da die Elektronen im Atom deutlich schneller als die Kerne bewegt sind. Die *Quantenphysik* ist ein theoretischer Ansatz, mit dem die konkreten Bahnkurven nicht ermittelt werden können.

■ 4.3. Bewegung im elektrischen Feld

■ 4.3.1. Parallel zu \vec{E}

■ 4.3.1.1. Beschleunigung

Analog zum freien Fall ergibt sich eine konstante Beschleunigung, die so verringert wird, dass eine Grenzgeschwindigkeit resultiert. Die Grenzgeschwindigkeit der Elektrodynamik ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Grenzgeschwindigkeit wird in der Potentialtheorie zunächst nicht erfasst.

■ 4.3.1.2. Energiesatz

Auch für die elektrodynamische Beschleunigung kann der Energiesatz verwendet werden:

$$\text{Geschwindigkeit} = \text{Solve}\left[q U == \frac{m v^2}{2}, v\right] // \text{Last}$$

$$\left\{v \rightarrow \frac{\sqrt{2} \sqrt{q} \sqrt{U}}{\sqrt{m}}\right\}$$

Für ein Elektron ($m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$, vgl. [BS1993], Seite XIX) ergibt das folgende Spannung für das Erreichen der Vakuumlichtgeschwindigkeit:

$$\text{Solve}[c == v /. \text{Geschwindigkeit}, U] // \text{Flatten}$$

$$\% /. \left\{m \rightarrow 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ "kg"}, q \rightarrow 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ "C"}, c \rightarrow 299792458 \frac{\text{"m"}}{\text{"s"}}\right\} /.$$

$$\left\{\text{"kg"} \rightarrow \frac{\text{"V"} \text{"C"} \text{"s"}^2}{\text{"m"}^2}\right\}$$

$$\left\{U \rightarrow \frac{c^2 m}{2 q}\right\}$$

$$\{U \rightarrow 255500. \text{ V}\}$$

Da hat selbst eine Überlandleitung mit **380 kV** mehr Spannung zwischen den einzelnen Phasen!

■ 4.3.1.3. Evolution der Physik

In der Kernphysik werden Energien oft in *Elektronenvolt* (**eV**) angegeben. Gebräuchlich sind außerdem die Einheiten **keV**, **MeV** und **GeV**, wobei die Fachleute tatsächlich glauben, dass sie dem Elektron beim Durchfallen einer entsprechend großen Spannung eine entsprechend große kinetische Energie mitgeben können. Dieser Glaube wird durch eine dogmatisch vertretene Einsteinsche *Relativitätstheorie* genährt, wonach sich die träge Masse bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit deutlich vergrößert.

Eine alternative Deutung besteht in der Einführung *geschwindigkeitsabhängiger Kräfte*, wodurch die kinetische Energie des beschleunigten Teilchens nicht beliebig gesteigert werden kann. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte zwingen zum Potenzialverzicht und sind deshalb wenig beliebt. Der Interessierte bekommt dadurch einen *Wirkungsgrad der Beschleunigung*, der deutlich kleiner als Eins ist, und muss die entsprechende Differentialgleichung vollständig lösen.

Historisch gab es einen unrühmlichen Streit zwischen "jüdischer" und "deutscher" Physik, wobei die deutsche Physik die Möglichkeit der Grenzgeschwindigkeit ganz ausschloss. Es sei darauf verwiesen, dass Einstein an eine *Evolution der Physik* (vgl. [EI1957]) glaubte, also die Möglichkeit, immer wieder Korrekturen und Modifikationen an etablierten Formalismen (auch eigenen) vornehmen zu dürfen.

■ 4.3.2. Quer zu \vec{E}

■ 4.3.2.1. Oszilloskop

Ein Oszilloskop ist eine *Brownsche Röhre*, in der die Ablenkspannung eines Plattenkondensators quer zur Ausbreitungsrichtung der Elektronen durch einen zu vermessenden Versuchsaufbau vorgegeben ist.

Das Fernsehbild ist eine *Anwendung* des Oszilloskops für die Nachrichtentechnik.

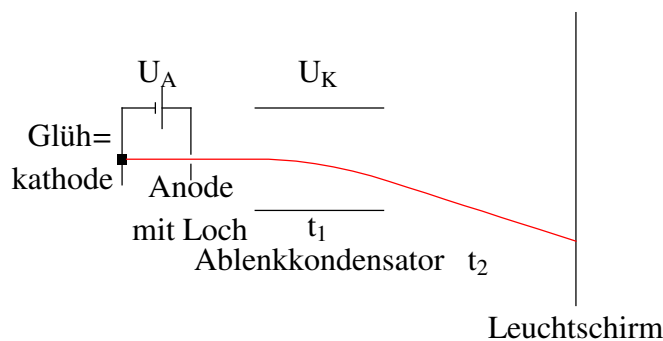
■ 4.3.2.2. Prinzipskizze

```
Elektronenkurve = Plot[Which[0 ≤ t < 2, 0, 2 ≤ t < 4, - $\frac{(t-2)^2}{200}$ , 4 ≤ t ≤ 7, - $\frac{1}{50} - \frac{(t-4)}{50}$ ],
  {t, 0, 7}, PlotStyle → Hue[0], DisplayFunction → Identity];
```

```
Show[Graphics[
```

```
{Polygon[{{0,  $\frac{-1}{200}$ }, {0,  $\frac{1}{200}$ }, { $\frac{-1}{7}$ ,  $\frac{1}{200}$ }, { $\frac{-1}{7}$ ,  $\frac{-1}{200}$ }}, Line[{{ $\frac{-1}{14}$ ,  $\frac{-1}{40}$ }, { $\frac{-1}{14}$ ,  $\frac{1}{20}$ }},
  Line[{{ $\frac{-1}{14}$ ,  $\frac{1}{20}$ }, { $\frac{1}{2} - \frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{20}$ }}, Line[{{ $\frac{1}{2} - \frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{20} - \frac{1}{200}$ }, { $\frac{1}{2} - \frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{20} + \frac{1}{200}$ }},
  Line[{{ $\frac{1}{2} + \frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{20} - \frac{1}{50}$ }, { $\frac{1}{2} + \frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{20} + \frac{1}{50}$ }}, Line[{{ $\frac{1}{2} + \frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{20}$ }, {1,  $\frac{1}{20}$ }},
  Line[{{1,  $\frac{-1}{200}$ }, {1,  $\frac{-1}{50}$ }}, Line[{{1,  $\frac{1}{200}$ }, {1,  $\frac{1}{20}$ }}, Line[{{2,  $\frac{-1}{20}$ }, {4,  $\frac{-1}{20}$ }},
  Line[{{2,  $\frac{1}{20}$ }, {4,  $\frac{1}{20}$ }}, Line[{{7,  $\frac{-1}{7}$ }, {7,  $\frac{1}{7}$ }}, Text[" Glüh=\nkathode", {-1, 0},
  Text["UA", { $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ }}, Text[" Anode\nmit Loch", {1,  $\frac{-1}{20}$ }},
  Text["t1", {3,  $\frac{-1}{15}$ }}, Text["UK", {3,  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ }}, Text["Ablenk Kondensator", {3,  $\frac{-1}{10}$ }},
  Text["t2", { $\frac{11}{2}$ ,  $\frac{-1}{10}$ }}, Text["Leuchtschirm", {7,  $\frac{-1}{6}$ }}],
```

```
Elektronenkurve, PlotRange → All, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Es gibt also 4 Spannungsregler am Oszilloskop:

- Spannung der Glühkathode (bestimmt die Strahldicke)
- Anodenspannung U_A (bestimmt die Elektronengeschwindigkeit)
- vertikale Ablenkspannung U_K (wird durch das Experiment bestimmt)
- horizontale Ablenkspannung U_H (wird durch das Experiment, eine Zeitfunktion oder eine Triggerschaltung bestimmt)

■ 4.3.2.3. Beschleunigung durch Anodenspannung U_A

Nach dem Energiesatz gilt (vereinfacht):

$$\text{HorizontalGeschwindigkeit} = \text{Solve}[e U_A == \frac{m v_x^2}{2}, v_x] // \text{Last}$$

$$\{v_x \rightarrow \frac{\sqrt{2} \sqrt{e} \sqrt{U_A}}{\sqrt{m}}\}$$

Die Geschwindigkeit in x -Richtung ist bei genauer Justage des Ablenkkondensators konstant.

■ 4.3.2.4. Beschleunigung durch Ablenkspannung U_K

Es entsteht ein waagerechter Wurf!

Die Beschleunigung in y -Richtung ergibt:

$$\text{Beschleunigung} = \text{Solve}[m a_y == e E /. \{E \rightarrow \frac{U_K}{d}\}, a_y] // \text{Flatten}$$

$$\{a_y \rightarrow \frac{e U_K}{d m}\}$$

Nach Durchlaufen des Ablenkkondensators (Länge l) ergibt sich:

$$\text{Zeit[1]} = \text{Solve}[l == v_x t_1, t_1] // \text{Flatten}$$

$$\{t_1 \rightarrow \frac{l}{v_x}\}$$

$$\text{VertikalGeschwindigkeit} = \{v_y \rightarrow a_y t_1\} /. \text{Beschleunigung} /. \text{Zeit[1]}$$

$$\{v_y \rightarrow \frac{e l U_K}{d m v_x}\}$$

Die Ablenkung am Ende des Kondensators beträgt:

$$\text{Ablenkung[1]} = \{y_1 \rightarrow \frac{a_y t_1^2}{2}\} /. \text{Beschleunigung} /. \text{Zeit[1]} /. \text{HorizontalGeschwindigkeit}$$

$$\{y_1 \rightarrow \frac{l^2 U_K}{4 d U_A}\}$$

■ 4.3.2.5. Bewegung bis zum Schirm

Bis zum Schirm wird noch die Strecke s durchlaufen, wofür die Zeit t_2 benötigt wird:

Zeit[2] = Solve[s == v_x t₂, t₂] // Flatten

$$\left\{ t_2 \rightarrow \frac{s}{v_x} \right\}$$

Die in Ablenkrichtung erzielte Geschwindigkeit wird beibehalten:

Ablenkung[2] = {y₂ → v_y t₂} /. VertikalGeschwindigkeit /. Zeit[2] /. HorizontalGeschwindigkeit

$$\left\{ y_2 \rightarrow \frac{l s U_K}{2 d U_A} \right\}$$

■ 4.3.2.6. Oszilloskop-Ablenkung

Daraus folgt die Ablenkung am Oszilloskop-Schirm:

Ablenkung[gesamt] = y₁ + y₂ /. Ablenkung[1] /. Ablenkung[2] // Simplify

$$\frac{l(l + 2s) U_K}{4 d U_A}$$

Dies bedeutet:

- Die Ablenkung ist der zu messenden Kondensatorspannung U_K direkt proportional.
- Die Empfindlichkeit des Oszilloskops wird durch die Anodenspannung U_A eingestellt.

Die Horizontalablenkung wird durch einen weiteren Kondensator erreicht, der oft genug ein *getriggertes Signal* erhält, um periodische Spannungsänderungen studieren zu können.

Ein gutes Oszilloskop kostet mindestens 5000 €. Bitte gehen Sie auch im Physik-Praktikum sorgfältig damit um.

■ 4.4. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{\$Version, \$ReleaseNumber, \$LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

TimeUsed[]

7.68

Literatur

[BS1993]

Hrsg. Niedrig H, *Bergmann/Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band **3 Optik**, Walter de Gruyter, 9. Auflage, (1993)

[EI1957]

Einstein A., Infeld L.: *Die Evolution der Physik*, Rowohlt Hamburg, (1957)