

Drehbewegungen

6. Vorlesung Physik I für Wirtschaftsingenieure

Auftraggeber: 10.11.2004 Professor Dr. Volker Beck, FH Aalen

Bearbeitung: 16.11.2004 – 9.12.2004 Dr. Norbert Südland

Letzte Berechnung: 9.12.2004 Dr. Norbert Südland

■ 6.1. Eigenschaften

■ 6.1.1. Flächensatz und Drehimpuls

■ 6.1.1.1. Wiederholung

Das zweite Keplersche Gesetz besagt:

2. Die von der Sonne zu den Planeten gezogenen Radiusvektoren bestreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Als Formel für Zentralkräfte:

$$\vec{r} \times \vec{v} = 2 \frac{dA}{dt} = \text{konst.} \quad (6.1)$$

■ 6.1.1.2. Drehimpuls \vec{L}

Multiplikation mit Masse m :

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \stackrel{\text{Kreisbahn}}{=} m r^2 \vec{\omega} \quad (6.2)$$

■ 6.1.1.3. Drehimpulserhaltung

Wegen Flächensatz gilt Drehimpulserhaltung:

*Wirkt auf ein rotierendes System kein Drehmoment,
so verharrt dasselbe im Zustand der Rotation.*

Massenträgheit gilt auch bei Rotation.

■ 6.1.2. Kraft und Drehmoment

■ 6.1.2.1. Wiederholung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{v}'[t] = m a \quad (6.3)$$

■ 6.1.2.2. Drehkraft bzw. Drehmoment

Analogieschluss:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + r \times \frac{d\vec{p}}{dt} = r \times \vec{F} \quad (6.4)$$

Grundgesetz der Drehbewegung.

■ 6.1.2.3. Einheit

$$[M] = [s][F] = N m = [W] \quad (6.5)$$

■ 6.1.3. Rotationsenergie

Kinetische Energie bei Kreisbahn mit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$E_{\text{rot}} = \frac{m v^2}{2} = \frac{m r^2 \omega^2}{2} \quad (6.6)$$

Drehmomentenbilanz mit Winkelgeschwindigkeit multiplizieren ergibt *Leistung P*:

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (6.7)$$

Integration über dt liefert Rotationsenergie, z.B. für Kreisbahn ($\vec{r} = \text{konst}$):

$$E_{\text{rot}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \cdot \vec{\omega} dt = \int_{L_1}^{L_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{L} = m \int_{L_1}^{L_2} \vec{\omega} \cdot d(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \stackrel{\text{Kreisbahn}}{=} \int_{\vec{\omega}_1}^{\vec{\omega}_2} m r^2 \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = \frac{m r^2 \omega^2}{2} \quad (6.8)$$

■ 6.1.3.1. Pirouette beim Eiskunstlauf

Wenig Reibung auf dem Eis, also Drehimpulserhaltung:

$$\vec{L} = m r_1^2 \vec{\omega}_1 = m r_2^2 \vec{\omega}_2 \quad (6.9)$$

Gegen die Zentrifugalkraft $\frac{m v^2}{r} = m r \omega^2$ muß Arbeit verrichtet werden:

$$\Delta W = - \int_{r_1}^{r_2} m r \omega[r]^2 dr = -m \int_{r_1}^{r_2} r \left(\frac{L}{m r^2} \right)^2 dr = -\frac{L^2}{m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} \quad (6.10)$$

$$\text{Arbeit} = - \int_{r_1}^{r_2} m r \omega[r]^2 dr \text{ /. } \left\{ \omega[r] \rightarrow \frac{L}{m r^2} \right\} // \text{Simplify}$$

$$\frac{L^2 \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)}{2 m}$$

$$\text{Arbeit} \text{ /. } \{r_2 \rightarrow \#r_1\} \ \& \ /@ \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

$$\left\{ \frac{3 L^2}{2 m r_1^2}, 0, -\frac{3 L^2}{8 m r_1^2} \right\}$$

Für $r_1 > r_2$ ist $\Delta W > 0$, also zu erbringen, für $r_1 < r_2$ wird Arbeit frei.

Dadurch ändert sich auch die Rotationsenergie, nicht jedoch der Drehimpuls:

$$\text{Vergleich} = \text{Arbeit} == \frac{m r_2^2 \omega_2^2}{2} - \frac{m r_1^2 \omega_1^2}{2} \text{ /. } \left\{ \omega_i \rightarrow \frac{L}{m r_i^2} \right\}$$

% // Simplify

$$\frac{L^2 \left(-\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)}{2 m} == -\frac{L^2}{2 m r_1^2} + \frac{L^2}{2 m r_2^2}$$

True

■ 6.1.3.2. Naturphänomene

Anwendung: Gezeitenreibung auf der Erde wird durch Mond verursacht, Arbeit wird geleistet (Gezeitenkraftwerke!).

Frage: Welches Drehmoment bewirken die Gezeiten auf den Mond?

Beschleunigungsarbeit wird nur bei *Wechselwirkung* geleistet!

Langzeitphänomen: Umlaufzahl des Mondes: $\frac{1}{\text{Monat}}$, Erdrotation: $\frac{1}{\text{Tag}}$.

Stabile Konvektionswalzen (Flußsysteme) auf der Erde durch Erddrehung und Sonneneinstrahlung: *perpetuum mobile* nach der Bibel (Prediger 1,7).

Philosophischer Streit um die Bibel ergibt auch philosophischen Streit um Energiesatz, da Philosophen zu wenig vom Drehimpulssatz verstehen.

Bislang hat kein Mensch ein funktionierendes *perpetuum mobile* aufgebaut.

Merke: *Der Drehimpulserhaltungssatz gilt auch dann, wenn Arbeit geleistet wird.*

■ 6.1.4. Drehmasse

■ 6.1.4.1. Definition

Term $J = m r^2$ hat Merkmale einer *Drehmasse*, allgemein zu berechnen:

$$J = \sum_{\mu=1}^n m_{\mu} r_{\mu}^2 = \iiint \rho[x, y, z] r[x, y, z]^2 dx dy dz \quad (6.11)$$

J wird als *Massenträgheitsmoment* bezeichnet und lässt sich für einfache Körper gut berechnen.

SI-Einheit:

$$[J] = [m][s^2] = \text{kg } m^2 \quad (6.12)$$

■ 6.1.4.2. Beispiel Zylinder

$$dV = 2\pi r * dr * l$$

also:

$$J[\text{Zylinder}] = \rho \int_{r_i}^{r_a} r^2 (2\pi r * l) dr // \text{Simplify}$$

$$\frac{1}{2} l \pi \rho (r_a^4 - r_i^4)$$

mit

$$m[\text{Zylinder}] = \rho \int_{r_i}^{r_a} (2\pi r * l) dr // \text{Simplify}$$

$$l \pi \rho (r_a^2 - r_i^2)$$

wird

$$J[\text{Zylinder, Formel}] = m \frac{J[\text{Zylinder}]}{m[\text{Zylinder}]} // \text{Simplify}$$

$$\frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)$$

Für $r_i = 0$ folgt:

$$J[\text{Vollzylinder}] = J[\text{Zylinder, Formel}] /. \{r_i \rightarrow 0, r_a \rightarrow r\}$$

$$\frac{m r^2}{2}$$

Für eine Kugel ergibt sich bei Rotation um den Schwerpunkt:

$$J[\text{Kugel}, 1] = \int_{-r}^r \frac{1}{2} \left(\sqrt{r^2 - h^2} \right)^2 \rho \pi \left(\sqrt{r^2 - h^2} \right)^2 dh$$

$$J[\text{Kugel}] = J[\text{Kugel}, 1] / \left\{ \rho \rightarrow \frac{3m}{4\pi r^3} \right\}$$

$$\frac{8}{15} \pi r^5 \rho$$

$$\frac{2mr^2}{5}$$

Massenträgheitsmomente einfacher geometrischer Körper sind vertafelt (z.B. [Stö1998], Abschnitt 3.4.1.2, Seite 103-104; [HMS2004], Bild-2-60, Seite 71).

■ 6.1.4.3. Satz von Steiner

Erfolgt die Drehung nicht um den Schwerpunkt des Körpers, so gilt:

$$J_a = J_S + m a^2$$

(6.13)

mit: a Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt
 m Gesamtmasse des Körpers
 J_S Massenträgheitsmoment bei Drehung um Schwerpunkt
 J_a Massenträgheitsmoment bei Drehung um gewünschten Punkt

■ 6.1.5. Vergleich Rotation und Translation

Vgl. Hering et al. ([HMS2004], Tabelle 2-6, Seite 62):

Translation		Rotation	
Grösse, Formel	Einheit	Grösse, Formel	Einheit
Weg s	m	Winkel φ	$\text{rad} = 1$
Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$	$\frac{m}{s}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{\text{rad}}{s} = \frac{1}{s}$
Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\frac{m}{s^2}$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	$\frac{\text{rad}}{s^2} = \frac{1}{s^2}$
Masse m	kg	Massenträgheitsmoment $J = \sum_{\mu} m_{\mu} r_{\mu}^2$	$\text{kg } m^2$
Kraft $\vec{F} = m \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\frac{\text{kg } m}{s^2} = N$	Drehmoment $\vec{M} = J \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$N m$
Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$	$\frac{\text{kg } m}{s} = N s$	Drehimpuls $\vec{L} = J \vec{\omega}$	$\frac{\text{kg } m^2}{s} = N m s$
Kraftkonstante $D = \frac{F}{s} \mid$	$\frac{N}{m}$	Winkelrichtgrösse $D^* = \left \frac{M}{\varphi} \right $	$\frac{N m}{\text{rad}} = N m$
Arbeit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$N m = J$	Arbeit $dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$	$N m = J$
Spannarbeit $W = \frac{1}{2} D s^2$	J	Spannarbeit $W = \frac{1}{2} D^* \varphi^2$	$N m = J$
kinetische Energie $= \frac{mv^2}{2}$	J	Rotationsenergie $W = \frac{1}{2} J \omega^2$	J
Leistung $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$W = \frac{J}{s}$	Leistung $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$	$W = \frac{J}{s}$
Stoss $u_{\mu} = u + \epsilon(u - v_{\mu})$	$\frac{m}{s}$	Stoss $w_{\mu} = w + \zeta(w - \omega_{\mu})$	$\frac{\text{rad}}{s} = \frac{1}{s}$
Stossparameter ϵ	1	Stossparameter ζ	1

Tabelle 6.1

■ 6.2. Anwendungen

■ 6.2.1. Vollzylinder auf schiefer Ebene

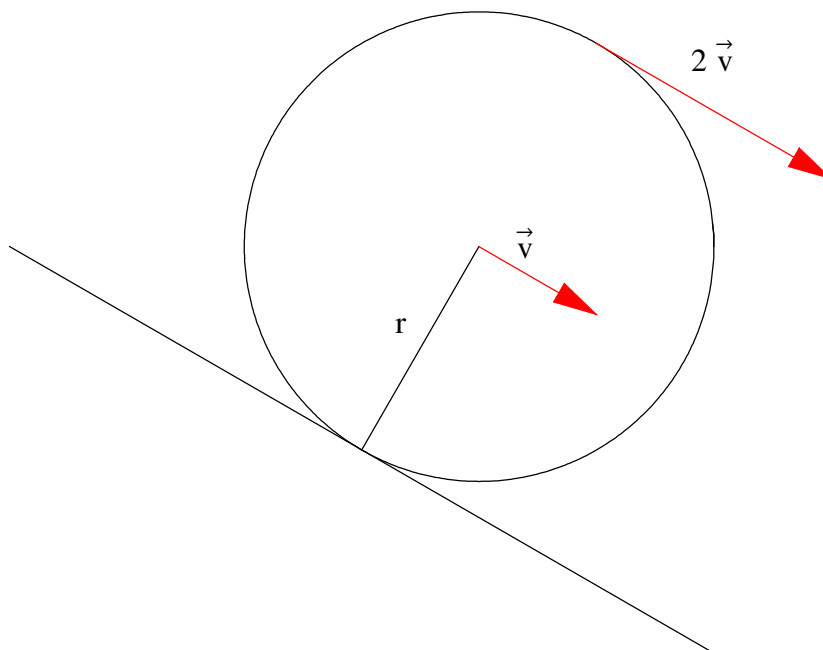
■ 6.2.1.1. Skizze

<< Graphics`Arrow`

```

$DefaultFont = {"Times", 12.};
Show[Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], Line[{0, 0}, {-Sin[π/6], -Cos[π/6]}],
Line[{{-3/2 - Sin[π/6], -Cos[π/6] + 3/2 Tan[π/6]}, {3/2 - Sin[π/6], -Cos[π/6] - 3/2 Tan[π/6]}],
Text["r", {-1/3, -1/3}], Text["v", {1/5, 0}],
Text["2 v", {1, 4/5}], Hue[0], Arrow[{0, 0}, {1/2, -Tan[π/6]/2}],
Arrow[{Sin[π/6], Cos[π/6]}, {Sin[π/6] + 1, Cos[π/6] - Tan[π/6]}], AspectRatio -> Automatic];

```



Aus der Skizze ergibt sich: $\omega = \frac{v}{r}$.

■ 6.2.1.2. Über Drehmomenten-Bilanz

Drehung um einen Punkt auf der Oberfläche, also Satz von Steiner:

$$J_r = \frac{m r^2}{2} + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2 \quad (6.14)$$

Drehmomenten-Bilanz mit Hangneigung β :

$$J_r \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{3}{2} m r^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{r} \times m \vec{g} \quad (6.15)$$

Leistungsbilanz:

$$P = \frac{3}{2} m r^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{\omega} + (\vec{r} \times m \vec{g}) \vec{\omega} = 0 \quad (6.16)$$

\vec{r} und \vec{g} schliessen den Winkel β ein; Integration über $d\mathbf{t}$ ergibt Energiebilanz:

$$E = \frac{J_r \omega^2}{2} + m r g \sin[\beta] \varphi = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2 + m g \sin[\beta] (r \varphi) \quad (6.17)$$

$r \omega = v, r \varphi = s$ und $s \sin[\beta] = h$ bestätigt Energiesatz:

$$\frac{m v^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + m g h = E \quad (6.18)$$

Deutung: E_{kin} des Schwerpunkts + E_{rot} des Schwerpunkts + $E_{\text{pot}} = E$.

Mögliche Deutung: Träge Masse durch Rotation scheinbar vergrößert!

Gleichförmige Beschleunigung wegen konstanter Beschleunigungskraft, also:

$$\text{Solve}\left[\frac{m v^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + m g s \sin[\beta] = E /. \{v \rightarrow a t, s \rightarrow \frac{a t^2}{2}, E \rightarrow 0\}, a\right]$$

$$\{\{a \rightarrow 0\}, \{a \rightarrow -\frac{2}{3} g \sin[\beta]\}\}$$

Rotationsbeschleunigung verlangsamt die translatorische Beschleunigung!

■ 6.2.1.3. Rechenrick bei Kraftbilanz

Gewohnte Kraftbilanz mit vergrößerter träger Masse:

$$\text{Solve}\left[m \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{r^2}\right) a = -m g \sin[\beta], a\right] // \text{Flatten}$$

$$\{a \rightarrow -\frac{2}{3} g \sin[\beta]\}$$

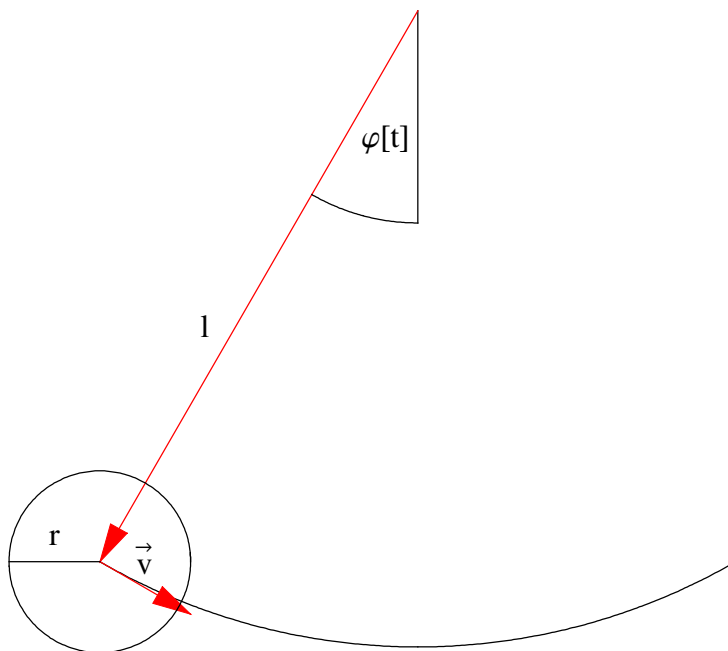
Merke: Die scheinbare Vergrößerung der trägen Masse erleichtert das Aufstellen der Bewegungsgleichung, da dadurch auf die Drehmomenten-Bilanz verzichtet werden kann.

Scheinbare Vergrößerung der trägen Masse klappt für alle $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (vgl. Skizze)!

■ 6.2.2. Pendel

■ 6.2.2.1. Skizze

```
Show[Graphics[{{Circle[{0, 0}, 1, {{(3/2 - 1/6)π, (3/2 + 1/6)π}},
  Line[{{0, 0}, {0, -1/3}}, Hue[0], Arrow[{0, 0}, {-Sin[π/6], -Cos[π/6]}],
  Arrow[{-Sin[π/6], -Cos[π/6]}, {1/7 - Sin[π/6], -Cos[π/6] - 1/7 Tan[π/6]}],
  GrayLevel[0], Circle[{-Sin[π/6], -Cos[π/6]}, 1/7], Text["l", {-1/3, -1/2}],
  Text["φ[t]", {-1/20, -1/5}], Circle[{0, 0}, 1/3, {{(3/2 - 1/6)π, 3/2 π}],
  Line[{{-Sin[π/6], -Cos[π/6]}, {-1/7 - Sin[π/6], -Cos[π/6]}],
  Text["r", {-1/14 - Sin[π/6], 1/25 - Cos[π/6]}],
  Text["→v", {1/14 - Sin[π/6], -Cos[π/6]}], AspectRatio -> Automatic];
```



Aus der Skizze ergibt sich: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{l}$.

Massenträgheitsmoment bei Rotation um den Schwerpunkt der Kugel: $J_S = \frac{2}{5} m r^2$.

■ 6.2.2.2. Kraftbilanz

$$\text{Pendelgleichung[1]} = m \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} \right) l \varphi''[t] = -m g \sin[\varphi[t]]$$

$$\text{Pendelgleichung[2]} = \text{Pendelgleichung[1]} / \{g \rightarrow \omega^2 \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) l\}$$

$$l m \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \varphi''[t] = -g m \sin[\varphi[t]]$$

$$l m \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \varphi''[t] = -l m \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \omega^2 \sin[\varphi[t]]$$

Allgemeiner Faktor der trägen Masse: $\left(1 + \frac{J_s}{m l^2} \right)$ bei physischem Pendel.

Mathematisches Pendel: $r \rightarrow 0$

■ 6.2.2.3. Leistung

Multiplikation mit $v = l \varphi'[t]$:

$$\text{Leistung[1]} = l \varphi'[t] \# \& /@ \text{Pendelgleichung[1]}$$

$$\text{Leistung[2]} = l \varphi'[t] \# \& /@ \text{Pendelgleichung[2]}$$

$$l^2 m \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \varphi'[t] \varphi''[t] = -g l m \sin[\varphi[t]] \varphi'[t]$$

$$l^2 m \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \varphi'[t] \varphi''[t] = -l^2 m \left(1 + \frac{2r^2}{5l^2} \right) \omega^2 \sin[\varphi[t]] \varphi'[t]$$

Jetzt egal, ob aus Drehmomentenbilanz oder Kraftbilanz erstellt!

■ 6.2.2.4. Energie

Integration über dt ist möglich, wähle AWP zur Vereinfachung: $\varphi'[0] \rightarrow 0$

$$\text{Energie}[1] = \int_0^t \# dt \ \& \ /@ \text{Leistung}[1]$$

$$\text{Energie}[1, 1] = \text{Energie}[1] /. \{\varphi'[0] \rightarrow 0\}$$

$$\text{Energie}[2] = \int_0^t \# dt \ \& \ /@ \text{Leistung}[2]$$

$$\text{Energie}[2, 1] = \text{Energie}[2] /. \{\varphi'[0] \rightarrow 0\} // \text{Simplify}$$

$$-\frac{1}{10} m (5 l^2 + 2 r^2) \varphi'[0]^2 + \frac{1}{10} m (5 l^2 + 2 r^2) \varphi'[t]^2 == -g l m \text{Cos}[\varphi[0]] + g l m \text{Cos}[\varphi[t]]$$

$$\frac{1}{10} m (5 l^2 + 2 r^2) \varphi'[t]^2 == -g l m \text{Cos}[\varphi[0]] + g l m \text{Cos}[\varphi[t]]$$

$$-\frac{1}{10} m (5 l^2 + 2 r^2) \varphi'[0]^2 + \frac{1}{10} m (5 l^2 + 2 r^2) \varphi'[t]^2 ==$$

$$-\frac{1}{5} m (5 l^2 + 2 r^2) \omega^2 \text{Cos}[\varphi[0]] + \frac{1}{5} m (5 l^2 + 2 r^2) \omega^2 \text{Cos}[\varphi[t]]$$

$$\frac{1}{10} m (5 l^2 + 2 r^2) (2 \omega^2 (\text{Cos}[\varphi[0]] - \text{Cos}[\varphi[t]]) + \varphi'[t]^2) == 0$$

Auflösung nach $\varphi'[t]$:

$$\text{Geschwindigkeit}[1] =$$

$$\text{Solve}[\text{Energie}[1, 1], \varphi'[t]] /. \{\text{Rule} \rightarrow \text{Equal}\} // \text{Flatten} // \text{Simplify} // \text{PowerExpand}$$

$$\text{Geschwindigkeit}[1, 1] = \text{Last}[\text{Geschwindigkeit}[1]]$$

$$\text{Geschwindigkeit}[2] =$$

$$\text{Solve}[\text{Energie}[2, 1], \varphi'[t]] /. \{\text{Rule} \rightarrow \text{Equal}\} // \text{Flatten} // \text{Simplify} // \text{PowerExpand}$$

$$\text{Geschwindigkeit}[2, 1] = \text{Last}[\text{Geschwindigkeit}[2]] /. \{\sqrt{\text{term}_-} \rightarrow -i \sqrt{\text{Expand}[-\text{term}]}\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{g} \sqrt{l} \sqrt{-10 \text{Cos}[\varphi[0]] + 10 \text{Cos}[\varphi[t]]}}{\sqrt{5 l^2 + 2 r^2}} + \varphi'[t] == 0, \varphi'[t] == \frac{\sqrt{g} \sqrt{l} \sqrt{-10 \text{Cos}[\varphi[0]] + 10 \text{Cos}[\varphi[t]]}}{\sqrt{5 l^2 + 2 r^2}} \right\}$$

$$\varphi'[t] == \frac{\sqrt{g} \sqrt{l} \sqrt{-10 \text{Cos}[\varphi[0]] + 10 \text{Cos}[\varphi[t]]}}{\sqrt{5 l^2 + 2 r^2}}$$

$$\{\varphi'[t] == -I \sqrt{2} \omega \sqrt{\text{Cos}[\varphi[0]] - \text{Cos}[\varphi[t]]}, \varphi'[t] == I \sqrt{2} \omega \sqrt{\text{Cos}[\varphi[0]] - \text{Cos}[\varphi[t]]}\}$$

$$\varphi'[t] == \sqrt{2} \omega \sqrt{-\text{Cos}[\varphi[0]] + \text{Cos}[\varphi[t]]}$$

■ 6.2.2.5. Elliptische Funktionen

Trennung der Veränderlichen:

$$\text{Integrand}[1] = \frac{\#}{\sqrt{-10 \text{Cos}[\varphi[0]] + 10 \text{Cos}[\varphi[t]]}} \& /@ \text{Geschwindigkeit}[1, 1] /. \{\varphi[0] \rightarrow \varphi_0\}$$

$$\text{Integrand}[2] = \frac{\#}{\sqrt{\text{Cos}[\varphi[t]] - \text{Cos}[\varphi[0]]}} \& /@ \text{Geschwindigkeit}[2, 1] /. \{\varphi[0] \rightarrow \varphi_0\} // \text{Simplify}$$

$$\frac{\varphi'[t]}{\sqrt{-10 \text{Cos}[\varphi_0] + 10 \text{Cos}[\varphi[t]]}} == \frac{\sqrt{g} \sqrt{l}}{\sqrt{5 l^2 + 2 r^2}}$$

$$\frac{\varphi'[t]}{\sqrt{-\text{Cos}[\varphi_0] + \text{Cos}[\varphi[t]]}} == \sqrt{2} \omega$$

Integral von $\varphi[0]$ bis $\varphi[t]$ bzw. 0 bis t führt auf spezielle Funktionen:

$$\int_0^{\varphi[t]} \# dt \& /@ \text{Integrand}[1] // \text{Simplify} // \text{PowerExpand}$$

$$\frac{-\text{Csc}\left[\frac{\varphi_0}{2}\right] \text{EllipticF}\left[\frac{\varphi_0}{2}, \text{Csc}\left[\frac{\varphi_0}{2}\right]^2\right] + \text{Csc}\left[\frac{\varphi_0}{2}\right] \text{EllipticF}\left[\frac{\varphi[t]}{2}, \text{Csc}\left[\frac{\varphi_0}{2}\right]^2\right]}{\sqrt{5}} == \frac{\sqrt{g} \sqrt{l} t}{\sqrt{5 l^2 + 2 r^2}}$$

■ 6.2.2.6. Elliptisches Integral mit Computeralgebra

Viertel Periodendauer $\frac{T}{4}$ mit Integral von 0 bis φ_0 ist einfacher.

Identität verwenden:

$$\text{Cos}[\varphi] == 1 - 2 \text{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2 // \text{FullSimplify}$$

True

Substitutionen: $\text{Cos}[\varphi[t]] \rightarrow 1 - 2 \text{Sin}\left[\frac{\varphi[t]}{2}\right]^2$, $k == \text{Sin}\left[\frac{\varphi_0}{2}\right]$, $\text{Sin}\left[\frac{\varphi[t]}{2}\right] == k \text{Sin}[y[t]]$:

$$\text{Integrand}[1, 1] =$$

$$\text{PowerExpand}[\text{Integrand}[1] /. \{\text{Cos}[\varphi_] \rightarrow 1 - 2 \text{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\} /. \{\varphi \rightarrow \text{Function}[\{t\}, 2 \text{ArcSin}[k \text{Sin}[y[t]]]\}],$$

$$\varphi_0 \rightarrow 2 \text{ArcSin}[k] // \text{Simplify} /. \{\text{Cos}[\varphi_] \rightarrow 1 - 2 \text{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\} // \text{ExpandAll} // \text{Simplify}$$

$$\frac{y'[t]}{\sqrt{5 - 5 k^2 \text{Sin}[y[t]]^2}} == \frac{\sqrt{g} \sqrt{l}}{\sqrt{5 l^2 + 2 r^2}}$$

$$\text{Integrand}[2, 1] = \text{Integrand}[2] /. \{\text{Cos}[\varphi_] \rightarrow 1 - 2 \text{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\} /.$$

$$\{\varphi \rightarrow \text{Function}[\{t\}, 2 \text{ArcSin}[k \text{Sin}[y[t]]]\}, \varphi_0 \rightarrow 2 \text{ArcSin}[k]\} /.$$

$$\{2 k^2 - 2 k^2 \text{Sin}[y[t]]^2 \rightarrow 2 k^2 \text{Cos}[y[t]]^2\} // \text{PowerExpand}$$

$$\frac{\sqrt{2} y'[t]}{\sqrt{1 - k^2 \text{Sin}[y[t]]^2}} == \sqrt{2} \omega$$

Integrationsgrenzen durch Substitution verändert:

$$\text{Integralgrenzen}[1, 2] = \text{ArcSin}\left[\frac{\text{Sin}\left[\frac{\#}{2}\right]}{k}\right] \& \text{/@ } \{0, 2 \text{ArcSin}[k]\}$$

$$\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Also standardisiertes bestimmtes Integral ergibt Viertelperiode:

$$\int_0^{\frac{T}{4}} \# dt \& \text{/@ } \text{Integrand}[1, 1]$$

$$\text{Periode}[1] = \text{Solve}\left[\% /. \left\{y[0] \rightarrow 0, y\left[\frac{T}{4}\right] \rightarrow \frac{\pi}{2}\right\}, T\right] // \text{Flatten}$$

$$-\frac{\text{EllipticF}[y[0], k^2]}{\sqrt{5}} + \frac{\text{EllipticF}\left[y\left[\frac{T}{4}\right], k^2\right]}{\sqrt{5}} == \frac{\sqrt{g} \sqrt{l} T}{4 \sqrt{5 l^2 + 2 r^2}}$$

$$\left\{T \rightarrow \frac{4 \sqrt{5 l^2 + 2 r^2} \text{EllipticK}[k^2]}{\sqrt{5} \sqrt{g} \sqrt{l}}\right\}$$

$$\int_0^{\frac{T}{4}} \# dt \& \text{/@ } \text{Integrand}[2, 1]$$

$$\text{Periode}[2] = \text{Solve}\left[\% /. \left\{y[0] \rightarrow 0, y\left[\frac{T}{4}\right] \rightarrow \frac{\pi}{2}\right\}, T\right] // \text{Flatten}$$

$$-\sqrt{2} \text{EllipticF}[y[0], k^2] + \sqrt{2} \text{EllipticF}\left[y\left[\frac{T}{4}\right], k^2\right] == \frac{T \omega}{2 \sqrt{2}}$$

$$\left\{T \rightarrow \frac{4 \text{EllipticK}[k^2]}{\omega}\right\}$$

EllipticK[0]

$$\frac{\pi}{2}$$

■ 6.2.2.7. Elliptisches Integral ohne Computeralgebra

Taylorreihe (vgl. [BrS1987], Abschnitt 1.1.3.2., Seite 32) der Wurzel gliedweise integrieren:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \text{Binomial}[-m, \mu] (-x)^\mu // \text{FullSimplify}$$

$$(1-x)^{-m}$$

? Binomial

Binomial[n, m] gives the binomial coefficient.

$$\mathbf{Binomial}[n, m] == \frac{n!}{m! (n - m)!} // \mathbf{FullSimplify}$$

True

Einzelnes Integral über x^μ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k^{2\mu} \sin[y]^{2\mu} dy /. \{\mathbf{If}[a_-, b_-, _] := (\mathbf{Print}[a]; b)\}$$

$$\mathbf{Re}[\mu] > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{k^{2\mu} \sqrt{\pi} \mathbf{Gamma}[\frac{1}{2} + \mu]}{2 \mathbf{Gamma}[1 + \mu]}$$

$\mathbf{Gamma}[z] == \Gamma[z] == (z - 1)!$ ist die Interpolation der Fakultätformel für komplexwertige z .

Einzelner Summenterm:

$$\mathbf{Summenterm}[2] = \mathbf{Binomial}[-\frac{1}{2}, \mu] (-1)^\mu \frac{k^{2\mu} \sqrt{\pi} \mathbf{Gamma}[\frac{1}{2} + \mu]}{2 \mathbf{Gamma}[1 + \mu]} // \mathbf{FunctionExpand}$$

$$\frac{(-1)^\mu k^{2\mu} \pi \mathbf{Gamma}[\frac{1}{2} + \mu]}{2 \mathbf{Gamma}[\frac{1}{2} - \mu] \mathbf{Gamma}[1 + \mu]^2}$$

Berechnung nach:

$$\{\mathbf{Gamma}[\frac{1}{2}], \mathbf{Gamma}[1]\}$$

$$\{\sqrt{\pi}, 1\}$$

und Differenzgleichung der Gamma-Funktion:

$$\mathbf{Gamma}[z + 1] == z \mathbf{Gamma}[z] // \mathbf{FullSimplify}$$

True

Ergebnisreihe:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \mathbf{Binomial}[-m, \mu] (-1)^\mu \frac{k^{2\mu} \sqrt{\pi} \mathbf{Gamma}[\frac{1}{2} + \mu]}{2 \mathbf{Gamma}[1 + \mu]} // \mathbf{FunctionExpand}$$

$$\% /. \{m \rightarrow \frac{1}{2}\}$$

$$\frac{1}{2} \pi \mathbf{Hypergeometric2F1}[\frac{1}{2}, m, 1, k^2]$$

$$\mathbf{EllipticK}[k^2]$$

Funktion ist vertafelt (z.B. [BrS1987], Abschnitt 1.1.2.4., Seite 13).

Vergleich:

Periode[2]

$$\left\{ T \rightarrow \frac{4 \text{EllipticK}[k^2]}{\omega} \right\}$$

■ 6.2.2.8. Reihendarstellung und Schaubild

Reihenbeginn:

$$\frac{4}{2\pi} \text{Plus @@} \left(\text{Binomial}[-m, \mu] (-1)^\mu \frac{k^{2\mu} \sqrt{\pi} \text{Gamma}\left[\frac{1}{2} + \mu\right]}{2 \text{Gamma}[1 + \mu]} \right) /. \{m \rightarrow \frac{1}{2}, \mu \rightarrow \#\} \& /@ \text{Range}[0, 6]$$

Reihe[2] = % // Expand

$$\frac{2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2 \pi}{8} + \frac{9k^4 \pi}{128} + \frac{25k^6 \pi}{512} + \frac{1225k^8 \pi}{32768} + \frac{3969k^{10} \pi}{131072} + \frac{53361k^{12} \pi}{2097152} \right)}{\pi}$$

$$1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \frac{25k^6}{256} + \frac{1225k^8}{16384} + \frac{3969k^{10}}{65536} + \frac{53361k^{12}}{1048576}$$

Die Periodendauer T ist also abhängig vom Winkel $\varphi_0 = \varphi_{\max}$ der maximalen Auslenkung:

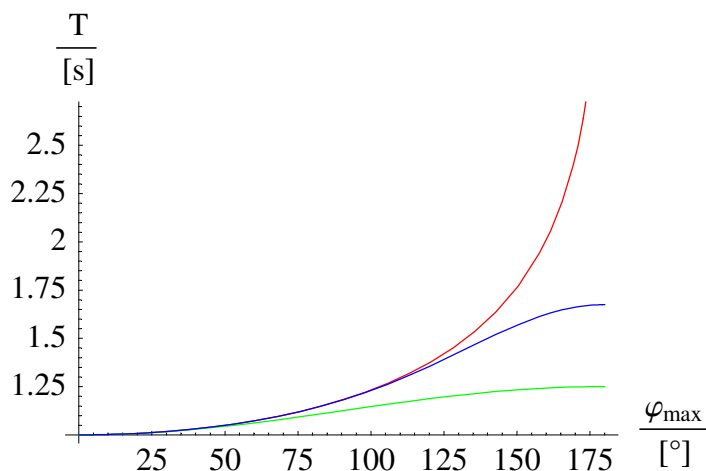
`$DefaultFont = {"Times", 12};`

`{T, Take[Reihe[2], 2], Reihe[2]} /. Periode[2] /. { $\omega \rightarrow 2\pi$, $k \rightarrow \text{Sin}\left[\frac{\varphi_0}{2} * \frac{\pi}{180}\right]$ }`

`Plot[Evaluate[%], { φ_0 , 0, 180},`

`PlotStyle \rightarrow {Hue[0], Hue[$\frac{1}{3}$], Hue[$\frac{2}{3}$]}, AxesLabel \rightarrow {" $\frac{\varphi_{\max}}{[^\circ]}$ ", " $\frac{T}{[s]}$ "};`

$$\left\{ \frac{2 \text{EllipticK}\left[\text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^2\right]}{\pi}, 1 + \frac{1}{4} \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^2, 1 + \frac{1}{4} \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^2 + \frac{9}{64} \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^4 + \frac{25}{256} \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^6 + \frac{1225 \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^8}{16384} + \frac{3969 \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^{10}}{65536} + \frac{53361 \text{Sin}\left[\frac{\pi \varphi_0}{360}\right]^{12}}{1048576} \right\}$$



Praxis: Reihendarstellung für T zur Bestimmung des Ortsfaktors g aus Pendelschwingungen.

■ 6.3. Beliebige Bezugssysteme

■ 6.3.1. Eigenschaften

■ 6.3.1.1. Starrer Körper

Bezugssystem als starrer Körper: \vec{v} für Translation, $\vec{\omega}$ für Rotation.

■ 6.3.1.2. Erddrehung

Erdoberfläche ist kein Inertialsystem, sondern rotierendes Bezugssystem.

Auch Kreisbahn ist beschleunigte Bewegung.

■ 6.3.1.3. Merkmal

Beschleunigte Bezugssysteme besitzen *Scheinkräfte*.

■ 6.3.1.4. Wiederholung Inertialsystem

Newtonscher Ansatz für Inertialsysteme:

$$\frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (6.19)$$

■ 6.3.2. Totale Zeitableitung

■ 6.3.2.1. Für rotierendes Bezugssystem

*Eine totale Ableitung ist in einem rotierenden System
von einer partiellen Ableitung zu unterscheiden:*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6.20)$$

Anschauliche Begründung: Bahngeschwindigkeit $\vec{\omega} \times \vec{r}$ dazu addieren, damit Geschwindigkeit im nicht-rotierenden System erhalten wird.

Zweite Zeitableitung:

$$\frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{s} \right) = \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{s} + 2 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) \quad (6.21)$$

■ 6.3.2.2. Beschleunigung im beliebig beschleunigten System

Auflösung nach partieller Ableitung von \vec{s} ergibt die *Scheinkräfte* im (beliebig) beschleunigten Koordinatensystem:

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{s} - 2 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) \quad (6.22)$$

■ 6.3.2.3. Translatorische Scheinkraft $-\vec{a}_0$

Geradlinige Beschleunigung \vec{a}_0 des Koordinatensystems bewirkt gegengerichtete Beschleunigung *im* Koordinatensystem.

Beispiel: Aufzug; Flugzeug fliegt Wurfparabel; Schwerelosigkeit im Innern.

■ 6.3.2.4. Winkel-Beschleunigung

Winkel-Beschleunigung erzeugt im rotierenden System Scheinkraft $-\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{s}$. Dieser Term hat keinen weiteren Namen.

■ 6.3.2.5. Coriolis-Kraft

Die Coriolis-Kraft ist die Scheinkraft der Art $-2 \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}$, wobei eine *reduzierte Kraft* besser als *Coriolis-Beschleunigung* bezeichnet wird.

Nur bei $\vec{v} \neq \mathbf{0}$ vorhanden.

Auf Nordhalbkugel: Rechtsabweichung, auf Südhalbkugel: Linksabweichung.

Beispiel: Wetterkunde, Geomorphologie.

■ 6.3.2.6. Zentrifugal-Kraft

Zentrifugal-Beschleunigung $\vec{a}_z = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s})$ korrespondiert mit Zentripetal-Beschleunigung im Intertialsystem, bis auf Vorzeichen gleich und entsprechend einfach zu verstehen.

Anwendung: Zentrifuge zur beschleunigten Sedimentation mit $\vec{a}_z \gg \vec{g}$

■ 6.3.2.7. Beliebige beschleunigtes System

Stets (für alle t) möglich: \vec{a}_0 und $\vec{\omega}$ des Koordinatensystems ermittelbar.

Alle Vektoren lassen sich vektoriell addieren. Also kann Formel (6.22) angewendet werden.

Gilt auch für rotierende Koordinatensysteme in einem rotierenden Koordinatensystem.

Beispiel: Erde dreht sich um die eigene Achse und um die Sonne (*verschiedene* Drehachsen).

Anwendung: Simulation von Fahrzeugmotoren.

■ 6.3.2.8. Beliebiges System

Zeitlich veränderliche Abstände der Koordinaten: In der Physik nicht verwendet!

Einsteinsche Relativitätstheorie: "*Raumkrümmung*" durch Gravitation, also Probleme beim Differenzieren nach den Ortskoordinaten. Konzept ist noch unvolledet! Auch Alternativen sind interessant.

■ 6.4. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

```
{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}
```

```
{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}
```

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

```
TimeUsed[]
```

```
18.02
```

Literatur

Bibel

"Die Bibel, oder die ganze Heilige Schrift Alten und Neuen Testaments nach der deutschen Uebersetzung Dr. Martin Luthers.", Revision durch Dr. J. Ph. Fresenius, (1751); Druck und Verlag von Heinrich Ludwig Brönnner, Frankfurt am Main, 40. Auflage, (1841)

[BrS1987]

Bronstein I. N., Semendjajew K. A. *Taschenbuch der Mathematik*, Gemeinschaftsausgabe Verlag Nauka, Moskau und BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 23. Auflage, (1987)

[HMS2004]

Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)

[Stö1998]

Stöcker H., *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, (1998)