

1. Lösung Musterklausur

Letzte Berechnung: 16. 6.2005 Dr. Norbert Südland

■ 1.1. Relativistik (3 Punkte)

a.) Was ist das Anliegen einer Relativitätstheorie?

b.) Nennen Sie zwei verschiedene Theorien, die zu ein und demselben Natur-Phänomen passen.

■ 1.1.1. Teilaufgabe a.)

Eine Relativitätstheorie stellt eine Alternative zu einer etablierten Theorie dar. Sie dient der Vermeidung von ideologischen Einseitigkeiten und hilft, das noch Unerforschte zu kennzeichnen.

(1 Punkt)

■ 1.1.2. Teilaufgabe b.)

Hier kann jedes zutreffende Natur-Phänomen gewählt werden, das durch gegensätzliche Darstellungen beschrieben wird.

(2 Punkte)

■ 1.1.2.1. Erste Möglichkeit

Experiment: Linear-Beschleuniger mit Grenzgeschwindigkeit:

1. Möglichkeit: Massenzunahme nach der Einsteinschen Relativitätstheorie,
2. Möglichkeit: Strömungsmodell (geschwindigkeitsabhängige Coulombkraft).

■ 1.1.2.2. Zweite Möglichkeit

Experiment: Uhr mit Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Ort(sfaktor):

1. Möglichkeit: Zeitdilatation nach der Einsteinschen Relativitätstheorie,
2. Möglichkeit: Gedämpfte Schwingung durch geschwindigkeitsabhängige Gravitationskraft.

■ 1.1.2.3. Dritte Möglichkeit

Experiment: Michelson-Interferometer mit fehlendem Ätherwind:

1. Möglichkeit: Spezielle Relativitätstheorie (Einstein),
2. Möglichkeit: Lichtreflexion am bewegten Spiegel nach den Stoßgesetzen.

■ 1.1.2.4. Vierte Möglichkeit

Phänomen: Planetenbewegung:

1. Möglichkeit: Erde im Mittelpunkt mit Epizykelbahnen (Ptolemäus, Aristoteles),
2. Möglichkeit: Sonne im Mittelpunkt mit Ellipsenbahnen (Kopernikus, Galilei, Kepler).

■ 1.1.2.5. Fünfte Möglichkeit

Phänomen: Fossilhaltige Sedimentgesteine:

1. Möglichkeit: Gussstrukturen aus der großen Sündflut (2455 ± 5 vor Christus),
2. Möglichkeit: Historische Geologie mit Jahrmillionen und Formationen.

■ 1.2. Batterie-Ladung (5 Punkte)

Der Strom einer permanent entladenen Batterie nimmt folgende Werte an:

$\frac{t}{[h]}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{I(t)}{[A]}$	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabelle 1.1

Bestimmen Sie daraus die ursprüngliche Ladung **auf zwei verschiedene** Weisen.

■ 1.2.1. Verständnis

Die Fläche unter der Kurve besitzt die Einheit $A h$ und ist gleich der Batterie-Ladung.

(1 Punkt)

■ 1.2.2. Grafische Methode

Die Kurve ist eine Gerade mit Steigung $-\frac{7A}{7h}$ und Achsenabschnitt $+7A$.

Daraus ergibt sich nach den Regeln der Geometrie folgender Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\text{Ergebnis}[2, 1] = \frac{1}{2} \cdot 7 \text{ "A" } \cdot 7 \text{ "h"}$$

% // N

$$\frac{49 \text{ A h}}{2}$$

$$24.5 \text{ A h}$$

(2 Punkte)

■ 1.2.3. Simpsonsche Regel

Nach der Simpsonschen Integrationsregel ergibt sich:

$$\text{Ergebnis}[2, 2] = \frac{1 \text{ "h" }}{2} \cdot 7 \text{ "A" } + 1 \text{ "h" } \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \text{ "A" } + \frac{1 \text{ "h" }}{2} \cdot 0 \text{ "A" }$$

$$\frac{49 \text{ A h}}{2}$$

(2 Punkte)

■ 1.2.4. Integration der Interpolationsgerade

Die Interpolationsgerade ergibt (z.B. nach Newton):

$$i[t] = 7 \text{ "A" } \text{Binomial}[t, 0] - 1 \frac{\text{ "A" }}{\text{ "h" }} \text{Binomial}[t, 1]$$

$$7 \text{ A} - \frac{\text{ A } t}{\text{ h}}$$

Die Integration darüber liefert:

$$\int_{0 \text{ "h" }}^{7 \text{ "h" }} i[t] dt$$

$$\frac{49 \text{ A h}}{2}$$

(2 Punkte)

■ 1.3. Spannungsmessung (5 Punkte)

Der Messbereich eines Drehspulinstruments beträgt $200 \mu\text{V}$, sein Innenwiderstand beträgt 30Ω .

a.) Bestimmen Sie die Vorwiderstände, die folgende Messbereiche zulassen:

U_{gesamt}	1 mV	2 mV	5 mV	10 mV	20 mV	50 mV
---------------------	------	------	------	-------	-------	-------

Tabelle 1.2

b.) Warum gibt es für dieses Gerät keine Schaltung, die einen Messbereich von $100 \mu\text{V}$ ermöglicht?

■ 1.3.1. Vorbereitung

Folgende Größen sind bekannt:

$$\text{bekannt} = \{U_{\text{maximal}} \rightarrow 200 \text{ "}\mu\text{V" }, R_i \rightarrow 30 \text{ "}\Omega\text{"}\} /. \{ \text{"}\mu\text{V" } \rightarrow \frac{\text{"V" }}{10^6} \}$$

$$\{U_{\text{maximal}} \rightarrow \frac{\text{V}}{5000}, R_i \rightarrow 30 \Omega\}$$

Zu folgenden Größen wird der Vorwiderstand gesucht:

$$\text{gesucht} = \{U_{\text{gesamt}} \rightarrow \#\} \& /@ (\{1, 2, 5, 10, 20, 50\} \text{ "mV" }) /. \{ \text{"mV" } \rightarrow \frac{\text{"V" }}{1000} \}$$

$$\left\{ \left\{ U_{\text{gesamt}} \rightarrow \frac{\text{V}}{1000} \right\}, \left\{ U_{\text{gesamt}} \rightarrow \frac{\text{V}}{500} \right\}, \left\{ U_{\text{gesamt}} \rightarrow \frac{\text{V}}{200} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ U_{\text{gesamt}} \rightarrow \frac{\text{V}}{100} \right\}, \left\{ U_{\text{gesamt}} \rightarrow \frac{\text{V}}{50} \right\}, \left\{ U_{\text{gesamt}} \rightarrow \frac{\text{V}}{20} \right\} \right\}$$

Die Formel für die Vorwiderstände lautet (vgl. [HMS2004], Formel (4-49), Seite 233):

$$\text{Formel} = \{R_V[U_{\text{gesamt}}] \rightarrow R_i \left(\frac{U_{\text{gesamt}}}{U_{\text{maximal}}} - 1 \right)\}$$

$$\{R_V[U_{\text{gesamt}}] \rightarrow R_i \left(-1 + \frac{U_{\text{gesamt}}}{U_{\text{maximal}}} \right)\}$$

(1 Punkt)

■ 1.3.2. Teilaufgabe a.)

Es ergeben sich folgende Vorwiderstände:

Formel /. bekannt /. gesucht

% // N

$$\left\{ \left\{ R_V \left[\frac{\text{V}}{1000} \right] \rightarrow 120 \Omega \right\}, \left\{ R_V \left[\frac{\text{V}}{500} \right] \rightarrow 270 \Omega \right\}, \left\{ R_V \left[\frac{\text{V}}{200} \right] \rightarrow 720 \Omega \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ R_V \left[\frac{\text{V}}{100} \right] \rightarrow 1470 \Omega \right\}, \left\{ R_V \left[\frac{\text{V}}{50} \right] \rightarrow 2970 \Omega \right\}, \left\{ R_V \left[\frac{\text{V}}{20} \right] \rightarrow 7470 \Omega \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ R_V [0.001 \text{ V}] \rightarrow 120. \Omega \right\}, \left\{ R_V [0.002 \text{ V}] \rightarrow 270. \Omega \right\}, \left\{ R_V [0.005 \text{ V}] \rightarrow 720. \Omega \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ R_V [0.01 \text{ V}] \rightarrow 1470. \Omega \right\}, \left\{ R_V [0.02 \text{ V}] \rightarrow 2970. \Omega \right\}, \left\{ R_V [0.05 \text{ V}] \rightarrow 7470. \Omega \right\} \right\}$$

(3 Punkte, jeweils ½ Punkt)

■ 1.3.3. Teilaufgabe b.)

Eine kleine Spannung kann nicht so einfach in eine größere und eine negative Spannung aufgeteilt werden, die jeweils proportional zur kleinen Spannung sind.

Nach der Formel ergibt sich ein negativer Vorwiderstand:

$$\text{Formel / . bekannt / . } \{U_{\text{gesamt}} \rightarrow 100 \text{ "}\mu\text{V"}\} / . \{ \text{"}\mu\text{V"} \rightarrow \frac{\text{"V"}}{10^6} \}$$

$$\{R_V \left[\frac{V}{10000} \right] \rightarrow -15 \Omega \}$$

(1 Punkt)

Das Beispiel zeigt, dass die mathematische Gültigkeit einer Formel über die physikalische Anwendbarkeit hinaus gehen kann.

■ 1.4. Galvanisierung (5 Punkte)

Ein Stahlzylinder (Länge $l = 2.50 \text{ m}$, Radius $r = 10 \text{ cm}$) soll galvanisch mit einer $d = 1/10 \text{ mm}$ dicken Schicht vernickelt werden ($\rho_{\text{Ni}} = 8.7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, $\ddot{A} = 0.30415 \frac{\text{mg}}{\text{C}}$). Welche Stromstärke ist dazu erforderlich, und wie lange muss das Werkstück im Bad bleiben, wenn die Stromdichte $j = 25 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ nicht überschritten werden darf?

■ 1.4.1. Vorbereitung

Folgende Größen sind bekannt:

$$\text{bekannt} = \left\{ l \rightarrow 2.50 \text{ "m"}, r \rightarrow 10 \text{ "cm"}, d \rightarrow \frac{\text{"mm"}}{10}, \rho_{\text{Ni}} \rightarrow 8.7 \frac{\text{"kg"}}{\text{"dm"}^3}, \ddot{A} \rightarrow 0.30415 \frac{\text{"mg"}}{\text{"A"} \text{ "s"}}, \right.$$

$$\left. j \rightarrow 25 \frac{\text{"A"}}{\text{"m"}^2} \right\} / . \left\{ \text{"mm"} \rightarrow \frac{\text{"m"}}{1000}, \text{"cm"} \rightarrow \frac{\text{"m"}}{100}, \text{"dm"} \rightarrow \frac{\text{"m}}{10}, \text{"mg"} \rightarrow \frac{\text{"kg}}{10^6} \right\}$$

$$\left\{ l \rightarrow 2.5 \text{ m}, r \rightarrow \frac{\text{m}}{10}, d \rightarrow \frac{\text{m}}{10000}, \rho_{\text{Ni}} \rightarrow \frac{8700. \text{ kg}}{\text{m}^3}, \ddot{A} \rightarrow \frac{3.0415 \times 10^{-7} \text{ kg}}{\text{A s}}, j \rightarrow \frac{25 \text{ A}}{\text{m}^2} \right\}$$

■ 1.4.2. Oberfläche

Der Stahlzylinder besitzt folgende Oberfläche:

$$\text{Oberfläche} = \{A \rightarrow 2\pi r l + 2\pi r^2\}$$

% /. bekannt // N

$$\{A \rightarrow 2 l \pi r + 2 \pi r^2\}$$

$$\{A \rightarrow 1.63363 \text{ m}^2\}$$

(1 Punkt)

■ 1.4.3. Volumen

Daraus ergibt sich folgendes Nickelvolumen:

$$\text{Volumen} = \{V \rightarrow \pi (r + d)^2 (l + 2d) - \pi r^2 l\} // \text{ExpandAll}$$

% /. bekannt // N

$$\{V \rightarrow 2 d^3 \pi + d^2 l \pi + 4 d^2 \pi r + 2 d l \pi r + 2 d \pi r^2\}$$

$$\{V \rightarrow 0.000163454 \text{ m}^3\}$$

Zum Vergleich ergibt sich:

$$\text{VolumenAlternative} = \{V \rightarrow A d\} /. \text{Oberfläche} /. \text{bekannt} // N$$

$$\{V \rightarrow 0.000163363 \text{ m}^3\}$$

(1 Punkt)

■ 1.4.4. Benötigte Ladung

Folgende Ladung wird zur Nickelabscheidung benötigt:

$$\text{Ladung} = \left\{Q \rightarrow \frac{m}{\bar{A}}\right\} /. \{m \rightarrow \rho_{\text{Ni}} V\} /. \text{Volumen}$$

% /. bekannt // N

$$\left\{Q \rightarrow \frac{(2 d^3 \pi + d^2 l \pi + 4 d^2 \pi r + 2 d l \pi r + 2 d \pi r^2) \rho_{\text{Ni}}}{\bar{A}}\right\}$$

$$\{Q \rightarrow 4.67549 \times 10^6 \text{ A s}\}$$

Die vereinfachte Rechnung ergibt:

$$\text{LadungAlternative} = \left\{ Q \rightarrow \frac{m}{\ddot{A}} \right\} /. \{ m \rightarrow \rho_{\text{Ni}} V \} /. \text{VolumenAlternative}$$

% /. bekannt // N

$$\left\{ Q \rightarrow \frac{0.000163363 \text{ m}^3 \rho_{\text{Ni}}}{\ddot{A}} \right\}$$

$$\{ Q \rightarrow 4.67288 \times 10^6 \text{ A s} \}$$

(1 Punkt)

■ 1.4.5. Maximale Stromstärke

Mit der Oberfläche resultiert die maximale Stromstärke:

$$\text{Stromstärke} = \{ i \rightarrow j A \} /. \text{Oberfläche}$$

% /. bekannt // N

$$\{ i \rightarrow j (2 l \pi r + 2 \pi r^2) \}$$

$$\{ i \rightarrow 40.8407 \text{ A} \}$$

(1 Punkt)

■ 1.4.6. Beschichtungszeit

Daraus folgt die Mindestzeit für die Beschichtung:

$$\text{Beschichtungszeit} = \left\{ t \rightarrow \frac{Q}{i} \right\} /. \text{Ladung} /. \text{Stromstärke}$$

% /. bekannt /. {"s" → $\frac{\text{"h"}}{3600}$ } // N

$$\left\{ t \rightarrow \frac{(2 d^3 \pi + d^2 l \pi + 4 d^2 \pi r + 2 d l \pi r + 2 d \pi r^2) \rho_{\text{Ni}}}{\ddot{A} j (2 l \pi r + 2 \pi r^2)} \right\}$$

$$\{ t \rightarrow 31.8003 \text{ h} \}$$

$$\text{BeschichtungszeitAlternative} = \left\{ t \rightarrow \frac{Q}{i} \right\} /. \text{LadungAlternative} /. \text{Stromstärke}$$

% /. bekannt /. {"s" → $\frac{\text{"h"}}{3600}$ } // N

$$\left\{ t \rightarrow \frac{0.000163363 \text{ m}^3 \rho_{\text{Ni}}}{\ddot{A} j (2 l \pi r + 2 \pi r^2)} \right\}$$

$$\{ t \rightarrow 31.7826 \text{ h} \}$$

(1 Punkt)

■ 1.5. Plattenkondensator (5 Punkte)

Zwei Platten mit einem Radius von $r = 10 \text{ cm}$ befinden sich in einem gegenseitigen Abstand von $d = 10 \text{ mm}$. An sie wird die Spannung $U = 220 \text{ V}$ angelegt.

- Welche Kapazität hat dieser Kondensator?
- Wie groß ist die elektrische Feldstärke zwischen den Platten?
- Wie groß ist die Ladung auf jeder der beiden Platten?

■ 1.5.1. Vorbereitung

Folgende Größen sind bekannt:

$$\text{bekannt} = \left\{ r \rightarrow 10 \text{ "cm"}, d \rightarrow 10 \text{ "mm"}, U \rightarrow 220 \text{ "V"}, \epsilon \rightarrow 1, \epsilon_0 \rightarrow 8.854187817 * 10^{-12} \frac{\text{"F"}}{\text{"m"}} \right\} /.$$

$$\left\{ \text{"cm"} \rightarrow \frac{\text{"m"}}{100}, \text{"mm"} \rightarrow \frac{\text{"m"}}{1000} \right\}$$

$$\left\{ r \rightarrow \frac{\text{m}}{10}, d \rightarrow \frac{\text{m}}{100}, U \rightarrow 220 \text{ V}, \epsilon \rightarrow 1, \epsilon_0 \rightarrow \frac{8.85419 \times 10^{-12} \text{ F}}{\text{m}} \right\}$$

■ 1.5.2. Teilaufgabe a.)

Es gilt:

$$\text{Kapazität} = \left\{ C \rightarrow \epsilon_0 \epsilon \frac{A}{d} \right\} / . \{ A \rightarrow \pi r^2 \}$$

% /. bekannt // EngineeringForm

$$\left\{ C \rightarrow \frac{\pi r^2 \epsilon \epsilon_0}{d} \right\}$$

$$\{ C \rightarrow (27.8163 \times 10^{-12}) \text{ F} \}$$

(2 Punkte)

■ 1.5.3. Teilaufgabe b.)

Es gilt:

$$\text{Feldstärke} = \left\{ E \rightarrow \frac{U}{d} \right\}$$

% /. bekannt

$$\left\{ E \rightarrow \frac{U}{d} \right\}$$

$$\left\{ E \rightarrow \frac{22000 \text{ V}}{\text{m}} \right\}$$

(1 Punkt)

■ 1.5.4. Teilaufgabe c.)

Es gilt:

Ladung = $\{Q \rightarrow C U\}$ /. Kapazität

% /. bekannt /. $\{ "F" \rightarrow \frac{"C"}{"V"} \}$

$$\left\{ Q \rightarrow \frac{\pi r^2 U \epsilon \epsilon_0}{d} \right\}$$

$$\left\{ Q \rightarrow 6.11958 \times 10^{-9} \text{ C} \right\}$$

(2 Punkte)

■ 1.6. Kondensatorhochpass (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Impedanzverhältnis $\frac{U_a[t]}{U_e[t]}$ in Betrag und Phase zu folgender Schaltung:

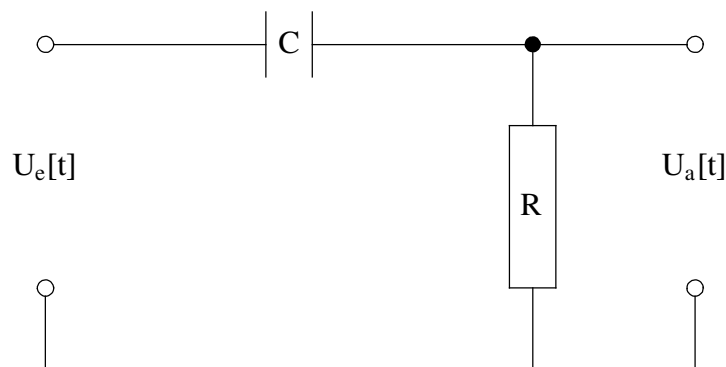


Abbildung 1.1

Wie groß ist die Grenzfrequenz f_g und der zugehörige Phasenwinkel, wenn $R = 159.16 \Omega$ und $C = 1 \text{ mF}$ beträgt?

Zeichnen Sie das Bode-Diagramm dieses Hochpasses.

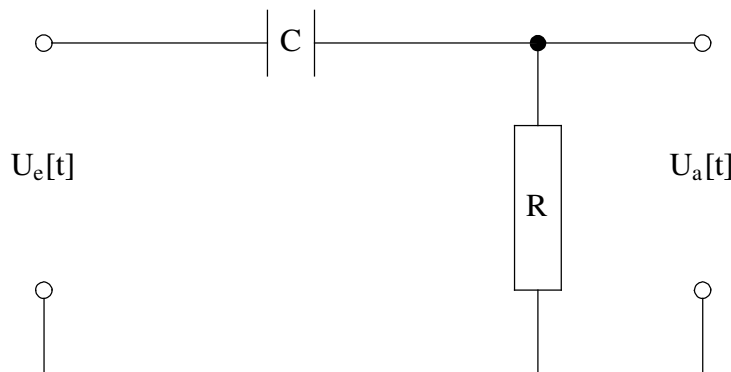
■ 1.6.1. Vorbereitung

■ 1.6.1.1. Schaltbild

```

$DefaultFont = {"Times", 12.};
Show[Graphics[{Line[{{1/20, 0}, {3/2 - 1/7, 0}}, Line[{{3/2 - 1/7, -1/5}, {3/2 - 1/7, 1/5}},
Line[{{3/2 + 1/7, -1/5}, {3/2 + 1/7, 1/5}}, Line[{{3/2 + 1/7, 0}, {4 - 1/20, 0}},
Line[{{3, 0}, {3, -1 + 1/2}}, Line[{{3 - 1/7, -1/2}, {3 - 1/7, -3/2}},
Line[{{3 + 1/7, -1/2}, {3 + 1/7, -3/2}}, Line[{{3 - 1/7, -1 + 1/2}, {3 + 1/7, -1 + 1/2}},
Line[{{3 - 1/7, -1 - 1/2}, {3 + 1/7, -1 - 1/2}}, Line[{{3, -1 - 1/2}, {3, -2}},
Line[{{3 - 1/5, -2}, {3 + 1/5, -2}}, Circle[0, 0, 1/20], Circle[0, -3/2, 1/20],
Circle[4, 0, 1/20], Circle[4, -3/2, 1/20], Disk[3, 0, 1/20],
Line[{{-1/5, -2}, {1/5, -2}}, Line[{{4 - 1/5, -2}, {4 + 1/5, -2}},
Line[{{0, -3/2 - 1/20}, {0, -2}}, Line[{{4, -3/2 - 1/20}, {4, -2}},
Text["C", {3/2, 0}], Text["R", {3, -1}], Text["Ue[t]", {0, -3/4}],
Text["Ua[t]", {4, -3/4}], AspectRatio -> Automatic];

```



■ 1.6.1.2. Bekannte Größen

Folgende Größen sind bekannt:

$$\text{bekannt} = \left\{ R \rightarrow 159.16 \text{ } \Omega, C \rightarrow 10^{-3} \frac{1}{\text{ } \Omega \text{ } \text{Hz}} \right\}$$

$$\left\{ R \rightarrow 159.16 \Omega, C \rightarrow \frac{1}{1000 \text{ Hz } \Omega} \right\}$$

■ 1.6.2. Impedanz

Laut Schaltbild ergibt sich eine Spannungsteilung, die wie folgt zu den jeweiligen Impedanzen proportional ist:

$$\text{Impedanzverhältnis} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \text{ // Simplify}$$

$$\frac{C R \omega}{-I + C R \omega}$$

(½ Punkt)

Die Trennung in Realteil und Imaginärteil ergibt:

$$\text{Trennung} = \text{Simplify} \left[\frac{\text{Impedanzverhältnis}}{j + \omega R C} \right] (j + \omega R C) \text{ // ExpandAll}$$

$$\frac{I C R \omega}{1 + C^2 R^2 \omega^2} + \frac{C^2 R^2 \omega^2}{1 + C^2 R^2 \omega^2}$$

(½ Punkt)

Die Amplitude dieses Verhältnisses ergibt:

$$\text{Amplitude} = \sqrt{\left(\frac{\text{First}[\text{Trennung}]}{j} \right)^2 + \text{Last}[\text{Trennung}]^2} \text{ // Simplify // PowerExpand}$$

$$\frac{C R \omega}{\sqrt{1 + C^2 R^2 \omega^2}}$$

(1 Punkt)

Die Phase dieses Verhältnisses ergibt:

$$\text{Phase} = \text{ArcTan} \left[\frac{\text{First}[\text{Trennung}]}{j \text{Last}[\text{Trennung}]} \right]$$

$$\text{ArcTan} \left[\frac{1}{C R \omega} \right]$$

(1 Punkt)

Die Grenzfrequenz f_g ergibt sich durch folgendes Verhältnis:

$$\text{Grenzfrequenz} = \text{Solve} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} == \text{Amplitude} /. \{\omega \rightarrow 2 \pi f_g\}, f_g \right] // \text{Last}$$

% /. bekannt // N

$$\{f_g \rightarrow \frac{1}{2 C \pi R}\}$$

$$\{f_g \rightarrow 0.999968 \text{ Hz}\}$$

(½ Punkt)

Die Phasenverschiebung bei der Grenzfrequenz beträgt:

$$\frac{180 \text{ "°"}}{\pi} \text{ Phase} /. \{\omega \rightarrow 2 \pi f_g\} /. \text{Grenzfrequenz}$$

$$45 \text{ °}$$

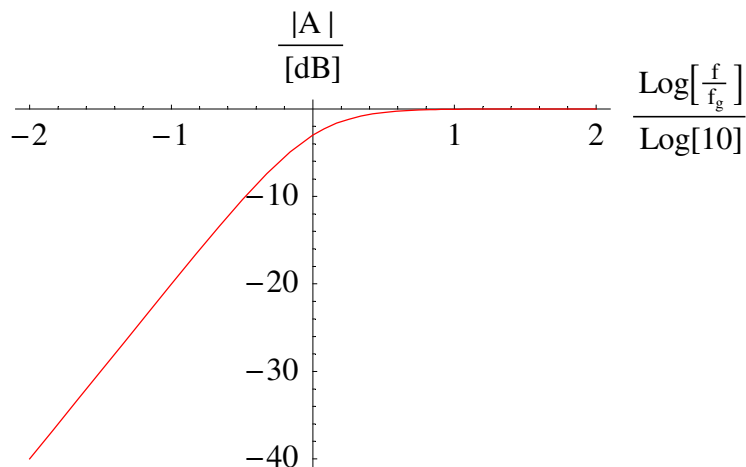
(½ Punkt)

■ 1.6.3. Schaubild

Daraus ergibt sich das Bode-Diagramm:

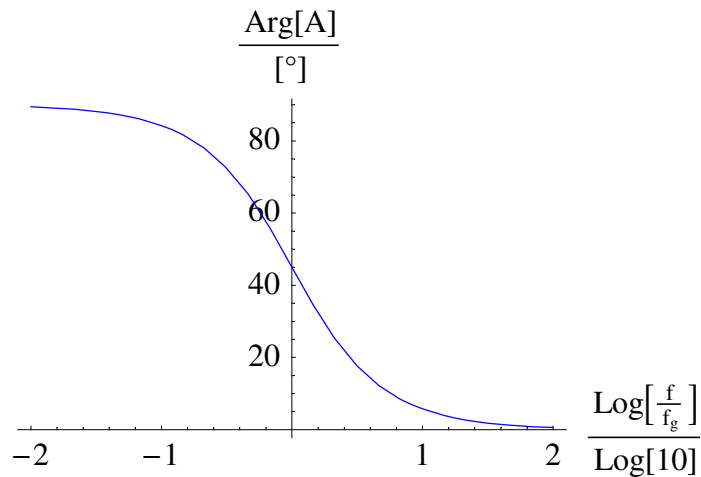
```
Plot[Evaluate[
  
$$\frac{1}{\text{Log}[10]} (20 \text{ Log}[\text{Amplitude} /. \{\omega \rightarrow 2 \pi 10^f f_g\} /. \text{Grenzfrequenz} /. \text{bekannt} // \text{Simplify} //$$

  PowerExpand)], {f, -2, 2},
  PlotStyle → Hue[0], AxesLabel → {"  $\frac{\text{Log}[\frac{f}{f_g}]}{\text{Log}[10]}$  ", "  $\frac{|A|}{[\text{dB}]}$  "}];
```



(½ Punkt)

```
Plot[Evaluate[ $\frac{180}{\pi}$  Phase /. { $\omega \rightarrow 2 \pi 10^f f_g$ } /. Grenzfrequenz /. bekannt],
  {f, -2, 2}, PlotStyle -> Hue[ $\frac{2}{3}$ ], AxesLabel -> {" $\frac{\text{Log}[\frac{f}{f_g}]}{\text{Log}[10]}$ ", " $\frac{\text{Arg}[A]}{[^\circ]}$ "}];
```



(½ Punkt)

■ 1.7. Relaxation (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung der ungedampten Relaxation

$$s''[t] + 2 \delta s'[t] == f[t] \quad (1.1)$$

das optimierte Fundamentalsystem

$$\left\{ 1, e^{-\delta t} \frac{\text{Sinh}[\delta t]}{\delta} \right\} \quad (1.2)$$

besitzt und bestimmen Sie die partikuläre Lösung

$$s_{\text{partikulär}}[t] = \int_0^t f[t_1] e^{-\delta(t-t_1)} \frac{\text{Sinh}[\delta(t-t_1)]}{\delta} dt_1 \quad (1.3)$$

für die Heavisidesche Sprungfunktion $f[t] = \Theta[t] = 1$ für $t > 0$, was einen Einschaltvorgang beschreibt.

■ 1.7.1. Bemerkung

Es ist hier einerlei, ob das angegebene Fundamentalsystem konkret hergeleitet oder durch Einsetzen verifiziert wird.

(jeweils 4 Punkte, Maximum aus beiden Ansätzen zählt)

■ 1.7.2. Optimiertheit

Das Fundamentalsystem

$$\text{Fundamentalsystem[optimiert]} = \left\{ \mathbf{1}, e^{-\delta t} \frac{\text{Sinh}[\delta t]}{\delta} \right\}$$

$$\left\{ 1, \frac{E^{-t\delta} \text{Sinh}[t\delta]}{\delta} \right\}$$

führt auf folgende Fundamentalmatrix bei $t \rightarrow 0$:

Fundamentalmatrix[optimiert] = {#, ∂_t#} & /@ Fundamentalsystem[optimiert] // Transpose;
Fundamentalmatrix[optimiert] // MatrixForm
% /. {t → 0} // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{E^{-t\delta} \text{Sinh}[t\delta]}{\delta} \\ 0 & E^{-t\delta} \text{Cosh}[t\delta] - E^{-t\delta} \text{Sinh}[t\delta] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist das Fundamentalsystem optimiert.

(1 Punkt)

■ 1.7.3. Differentiation der Fundamentallösungen

Die Ableitungen der Fundamentallösungen ergeben:

Ableitungen = {#, ∂_t#, ∂_(t,2)#} & /@ Fundamentalsystem[optimiert] // Transpose;
Ableitungen // MatrixForm
Ableitungen // Simplify // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{E^{-t\delta} \text{Sinh}[t\delta]}{\delta} \\ 0 & E^{-t\delta} \text{Cosh}[t\delta] - E^{-t\delta} \text{Sinh}[t\delta] \\ 0 & -2 E^{-t\delta} \delta \text{Cosh}[t\delta] + 2 E^{-t\delta} \delta \text{Sinh}[t\delta] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{E^{-t\delta} \text{Sinh}[t\delta]}{\delta} \\ 0 & E^{-2t\delta} \\ 0 & -2 E^{-2t\delta} \delta \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

■ 1.7.4. Probe der ersten Fundamentallösung

Die Probe der ersten Fundamentallösung ergibt (in der homogenen Gleichung):

$$\text{Gleichung} = s''[t] + 2 \delta s'[t] == 0$$

$$2 \delta s'[t] + s''[t] == 0$$

Gleichung /. {s → Function @@ {{t}, First[Fundamentalsystem[optimiert]]}}

True

(1 Punkt)

■ 1.7.5. Probe der zweiten Fundamentallösung

Die Probe der zweiten Fundamentallösung ergibt (in der homogenen Gleichung):

Gleichung /. {s → Function @@ {{t}, Last[Fundamentalsystem[optimiert]]}}

% // ExpandAll

$$-2 E^{-t \delta} \delta \text{Cosh}[t \delta] + 2 E^{-t \delta} \delta \text{Sinh}[t \delta] + 2 \delta (E^{-t \delta} \text{Cosh}[t \delta] - E^{-t \delta} \text{Sinh}[t \delta]) == 0$$

True

(1 Punkt)

■ 1.7.6. Charakteristik

Die Gleichung führt auf folgende Charakteristik:

Gleichung /. {s → Function[{t}, e^{βt}] // Simplify

Charakteristik = Solve[%, β]

$$E^{t \beta} \beta (\beta + 2 \delta) == 0$$

Solve::verif : Potential solution $\{\beta \rightarrow \frac{-\infty}{t}\}$ (possibly discarded by verifier) should be checked by hand. May require use of limits.

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

$$\{\{\beta \rightarrow 0\}, \{\beta \rightarrow -2 \delta\}\}$$

(1 Punkt)

■ 1.7.7. Charakteristisches Fundamentalsystem

Dies führt auf folgendes Fundamentalsystem:

$$\text{Fundamentalsystem}[1] = e^{\beta t} /. \text{Charakteristik} \\ \{1, E^{-2t\delta}\}$$

(1 Punkt)

und folgende Fundamentalmatrix:

$$\text{Fundamentalmatrix}[1] = \{\#, \partial_t \#\} \& /@ \text{Fundamentalsystem}[1] // \text{Transpose}; \\ \text{Fundamentalmatrix}[1] // \text{MatrixForm} \\ \% /. \{t \rightarrow 0\} // \text{MatrixForm} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & E^{-2t\delta} \\ 0 & -2E^{-2t\delta}\delta \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -2\delta \end{array} \right)$$

(1 Punkt)

■ 1.7.8. Konstruktion des optimierten Fundamentalsystems

Dies führt zu folgendem zweiten Fundamentalsystem:

$$\text{Fundamentalsystem}[2] = \left\{ \text{First}[\text{Fundamentalsystem}[1]], \right. \\ \left. \frac{\text{First}[\text{Fundamentalsystem}[1]] - \text{Last}[\text{Fundamentalsystem}[1]]}{2\delta} \right\} \\ \left\{ 1, \frac{1 - E^{-2t\delta}}{2\delta} \right\}$$

(1 Punkt)

Es besteht folgende Identität:

$$\text{Fundamentalsystem}[\text{optimiert}] == \text{Fundamentalsystem}[2] // \text{Simplify} \\ \text{True}$$

■ 1.7.9. Einschaltvorgang

Die partikuläre Lösung ergibt mit $f[t] = 1$:

$$\text{partikulär} = \int_0^t f[t_1] e^{-\delta(t-t_1)} \frac{\text{Sinh}[\delta(t-t_1)]}{\delta} dt_1 /. \{f[t_1] \rightarrow 1\}$$

% // Simplify

$$\frac{\frac{t}{2} - \frac{1}{4\delta} + \frac{E^{-2t\delta}}{4\delta}}{\delta}$$

$$\frac{-1 + E^{-2t\delta} + 2t\delta}{4\delta^2}$$

(1 Punkt)

Dabei kann der Integrand wie folgt vereinfacht werden:

$$e^{-\delta(t-t_1)} \frac{\text{Sinh}[\delta(t-t_1)]}{\delta} // \text{Simplify} // \text{ExpandAll}$$

$$\frac{1}{2\delta} - \frac{E^{-2t\delta+2\delta t_1}}{2\delta}$$

wodurch das erhaltene Integral unmittelbar einsichtig wird.

Die Probe stimmt:

First[Gleichung] == 1 /. {s → Function @@ {t}, partikulär}

% // ExpandAll

$$E^{-2t\delta} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} E^{-2t\delta}\right) == 1$$

True

■ 1.8. Rechenhilfen

Elektrische Feldkonstante:

$$\epsilon_0 = 8.854187817 * 10^{-12} \frac{As}{Vm} \quad (1.4)$$

Identitäten:

$$\text{Cosh}[x] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{Sinh}[x] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1.5)$$

$$\text{Cos}[x] = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{Sin}[x] = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad j = \sqrt{-1} \quad (1.6)$$

■ 1.9. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{\$Version, \$ReleaseNumber, \$LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, 0}

Die Berechnungszeit betrug (in Sekunden):

TimeUsed[]

4.91

Literatur

[HMS2004]

Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)